



Total No. of Printed Pages - 6

2MT0053

पत्र - II / PAPER - II
FRO4 - MT

गणित
MATHEMATICS

पूर्णांक : 200

Full Marks : 200

समय : 3 घण्टे

Time : 3 Hours

निर्देश :

प्रश्न-पत्र दो खण्डों में विभक्त है। परीक्षार्थी को खण्ड-अ से चार अनिवार्य और खण्ड-ब से चार विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर देना है। खण्ड-अ के अनिवार्य प्रश्न में 4 विषयनिष्ठ प्रश्न हैं जिसमें प्रत्येक विषयनिष्ठ प्रश्न के 10 अंक हैं। इसके अतिरिक्त खण्ड-ब के 7 विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों में से किन्हीं 4 विषयनिष्ठ प्रश्न का उत्तर दें जिनमें प्रत्येक प्रश्न के 40 अंक हैं। वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर वर्णनात्मक रूप से लिखें।

Instructions :

The question paper is divided into **two sections**. The candidates will be required to answer **Four** compulsory Subjective questions from **Section - A** and **four** optional **subjective** questions from **Section - B**. There shall be compulsory **Four Subjective** type questions, each of **10 marks**. In addition, there shall be 7 optional subjective questions in **Section - B**, of which candidates will be required to answer only **4 subjective** questions, each of **40 marks**. The optional questions shall be answered in the descriptive form.

खण्ड - अ / Section - A

1. प्रथम कोटि एवं प्रथम घात अवकल समीकरण की परिभाषा दीजिए। निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए। [10]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2} \text{ और } (1+x^2) \frac{dy}{dx} = 2xy$$

Define a first order and first degree differential equation. Solve the differential equations given below.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2} \text{ and } (1+x^2) \frac{dy}{dx} = 2xy$$





2. i) सरल आवर्त गति की परिभाषा दीजिए।
 ii) सरल आवर्त गति करने वाले कण के त्वरण का व्यंजक प्राप्त कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि यह विस्थापन के समानुपाती तथा माध्य स्थिति की ओर निर्देशित होता है।

[10]

- i) Define Harmonic motion.
 ii) Derive the expression for acceleration of a particle executing simple harmonic motion and hence show that it is directly proportional to the displacement and directed towards the mean position.

3. समुहित आवृत्ति वितरण के अंकगणितीय माध्य की गणना हेतु स्टेप डेविएशन विधि को समझाइए। सिद्ध कीजिए कि यह विधि प्रत्यक्ष विधि के समान ही परिणाम देती है। किन परिस्थितियों में स्टेप डेविएशन विधि अधिक उपयुक्त मानी जाती है। एक उपयुक्त उदाहरण दें।

[10]

Explain the step deviation method for calculating the arithmetic mean of a grouped frequency distribution. Prove that this method gives the same result as the direct method under what conditions is the step deviation method preferred? Give a suitable example.

4. बेयस के प्रमेय का कथन एवं प्रमाण को प्रस्तुत करें। तीन मशीनें M_1 , M_2 और M_3 क्रमशः कुल उत्पादन का 30%, 45% और 25% उत्पादन करती है। इनसे बने वाले दोषपूर्ण उत्पादों का प्रतिशत क्रमशः 2%, 3% और 5% है। यदि यादृच्छिक चुना गया एक उत्पाद दोषपूर्ण पाया जाए तो यह ज्ञात कीजिए कि यह मशीन M_2 द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता है।

[10]

State and prove Baye's theorem. Three machines M_1 , M_2 and M_3 produce respectively 30%, 45% and 25% of the total items in a factory. The percentage of defective items produced by them are 2%, 3% and 5% respectively. If an item selected at random is found to be defective, find the probability that it was produced by Machine M_2 .

खण्ड - ब / Section - B

1. a) λ, μ के किस मान के लिए संगामी समीकरण

[20]

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

को (i) अद्वितीय हल (ii) अपरमित हल (iii) कोई हल नहीं होगा, इसकी जाँच करें।





Investigate for what value of λ, μ the simultaneous equations

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

have (i) a unique solution (ii) an infinite number of solutions (iii) no solution.

b) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए

अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (non-singular matrices) P और Q निकाले जिससे की PAQ एक सामान्य रूप में हो। और A का रैंग (rank) भी ज्ञात करें। [20]

For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

find non-singular matrices P and Q such that PAQ is in normal form. Also find the rank of A.

2. a) निम्न समीकरणों को हल कीजिए, मैट्रिक्स विधि से [20]

Solve the equations by matrix method

$$x - 2y + 3z = 5$$

$$4x + 3y + 4z = 7$$

$$x + y - z = -4$$

b) संगतता के लिए परीक्षण करें और समीकरण को हल करें। [20]

Test for consistency and solve the equation

$$5x + 3y + 7z = 4$$

$$3x + 26y + 2z = 9$$

$$7x + 2y + 10z = 5$$





3. a) माना V सभी $n \times n$ आव्यूह के वास्तविक संख्याओं R का सदिश स्थान है। माना कि W_1 सभी सममित आव्यूह का V में समुच्चय है और W_2 सभी असममित आव्यूह का V में समुच्चय है। दर्शाइये कि W_1 और W_2 उपसदिश स्थान $V(R)$ में है और $V = W_1 \oplus W_2$. [20]
Let V be the vector space of all $n \times n$ matrices over the field R of the real numbers. Let W_1 be the set of all symmetric matrices in V and W_2 be the set of all skew symmetric matrices in V . Show that W_1 and W_2 are subspace of $V(R)$ and $V = W_1 \oplus W_2$.
- b) मान लीजिए कि एक परिमित आयामी सदिश स्थान $V(F)$ दो उप सदिश स्थान W_1 और W_2 का प्रत्यक्ष योग है और B_1 और B_2 , W_1 और W_2 का आधार है क्रमशः। तब [20]
i) V के लिए $B_1 \cup B_2$ आधार है।
ii) $\dim(V) = \dim W_1 + \dim W_2$.
Let a finite dimensional vector space $V(F)$ is a direct sum of two subspaces W_1 and W_2 and B_1 and B_2 be bases for W_1 and W_2 respectively. Then
i) $B_1 \cup B_2$ is a bases for V .
ii) $\dim(V) = \dim W_1 + \dim W_2$.
4. a) दो स्वतंत्र सामान्य यादृच्छिक (normal random) चरों के योग का संभाव्यता घनत्व फलन (probability density function) ज्ञात कीजिए। [20]
Obtain the probability density function of the sum of two independent normal variables.
- b) निम्नलिखित स्थिर गुणांक वाले उच्च कोटि के रैखिक अवकल समीकरण को हल कीजिए। [20]
$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$$

Solve the following higher-order linear differential equation with constant coefficients.
$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$$
5. a) वक्र $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को x -अक्ष के परितः घूमने से धिरे ठोस का जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) x -axis के परितः ज्ञात कीजिए जहाँ a, b धनात्मक अचर हैं। [20]
Find the moment of inertia about x -axis of the solid obtained by revolving $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ about x -axis where a, b being positive constant.





- b) अवकलन समीकरण $(D^2 - 3D + 2)y = 3 \sin 2x$ का हल ज्ञात कीजिए। [20]

Solve the differential equation

$$(D^2 - 3D + 2)y = 3 \sin 2x$$

6. a) एक शंकु और एक अर्धगोले से बने (समान आधार वाले) पिंड को एक खुरदरी क्षैतिज मेज पर रखा गया जिसमें अर्धगोला मेज के संपर्क में है। यह प्रदर्शित कीजिए कि संतुलन के स्थिर रहने के लिए शंकु की अधिकतम ऊँचाई अर्धगोले की त्रिज्या की $\sqrt{3}$ गुनी होती है। [20]

A body consisting of a cone and a hemisphere on the same base, rests on a rough horizontal table, the hemisphere being in contact with the table. Show that the greatest height of the cone so that equilibrium may be stable is $\sqrt{3}$ times the radius of the hemisphere.

- b) पाइसन वितरण (poisson distribution) का आघूर्ण जनक फलन तथा कैरेक्टरिस्टिक फलन (characteristic function) प्राप्त कीजिए। [20]

Obtain the moment generating function and characteristic function of the poisson distribution.

7. a) भार W तथा लंबाई $2a$ वाली एक भारी समान (समरूप) छड़ AB को बिन्दु A पर काज (hinge) से जोड़ा गया है। छड़ का निचला सिरा B , बिन्दु A से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा से $2b$ की दूरी पर रखा गया है। जिसके लिए बिंदु B पर एक क्षैतिज बल P लगाया गया है। सिद्ध कीजिए कि काज पर अभिक्रिया

$$\frac{W\sqrt{4a^2 - 3b^2}}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ तथा लगाया गया बल } \frac{Wb}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ है।} [20]$$

A heavy uniform rod AB of weight W and length $2a$ is hinged at point A and the lower end is kept at a distance $2b$ from the vertical through A by a horizontal

force P applied at B . Prove that the reaction at the hinged is $\frac{W\sqrt{4a^2 - 3b^2}}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$ and

$$\text{force is } \frac{Wb}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$





- b) लम्बाई ' a ' की एक समान (समरूप) छड़ AB, बिन्दु A पर एक ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे टिकी हुई है और दूसरे सिरे B को लम्बाई b की एक डोरी द्वारा सहारा दिया गया है जहाँ ($b > a$) है, जो बिन्दु C पर ऊर्ध्वाधर रूप से A के ऊपर बंधी हुई है। ऊर्ध्वाधर दीवार के साथ छड़ का झुकाव ज्ञात कीजिए।

[20]

A uniform rod AB of length ' a ' rests against a vertical wall at A and the other end B is supported by a string of length b ($b > a$) which is tied at a point C vertically above A. Find the inclination of the rod with the vertical wall.

