



Total No. of Printed Pages - 7

1MT0058

पत्र - I / PAPER - I

FRO3-MT

गणित

MATHEMATICS

पूर्णांक : 200

Full Marks : 200

समय : 3 घण्टे

Time : 3 Hours

निर्देश :

प्रश्न-पत्र दो खण्डों में विभक्त है। परीक्षार्थी को खण्ड-अ से चार अनिवार्य और खण्ड-ब से चार विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर देना है। खण्ड-अ के अनिवार्य प्रश्न में 4 विषयनिष्ठ प्रश्न हैं जिसमें प्रत्येक विषयनिष्ठ प्रश्न के 10 अंक हैं। इसके अतिरिक्त खण्ड-ब के 7 विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों में से किन्हीं 4 विषयनिष्ठ प्रश्न का उत्तर दें जिनमें प्रत्येक प्रश्न के 40 अंक हैं। वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर वर्णनात्मक रूप से लिखें।

Instructions :

The question paper is divided into **two sections**. The candidates will be required to answer **Four** compulsory Subjective questions from **Section - A** and **four** optional **subjective** questions from **Section - B**. There shall be compulsory **Four Subjective** type questions, each of **10 marks**. In addition, there shall be 7 optional subjective questions in **Section - B**, of which candidates will be required to answer only **4 subjective** questions, each of **40 marks**. The optional questions shall be answered in the descriptive form.





खण्ड - अ / Section - A

1. दर्शाइए कि समिश्र संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित $f_1, f_2, \dots, f_6$ छह रूपान्तरण [10]

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = 1 - x, f_4(x) = \frac{x}{1-x}, f_5(x) = \frac{1}{1-x}, f_6(x) = \frac{x-1}{x}$$

(जैसा कि प्रश्न में परिभाषित है) संयोजन संक्रिया के सापेक्ष कोटि 6 का एक सीमित अविनिमेय समूह बनाते हैं।

Show that the set of six transformations $f_1, f_2, \dots, f_6$ on the set of complex numbers defined by

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = 1 - x, f_4(x) = \frac{x}{1-x}, f_5(x) = \frac{1}{1-x}, f_6(x) = \frac{x-1}{x}$$

forms a finite non-abelian group of order 6 w.r.t. composite operation.

2. a) सीधी रेखा का ढाल अवरोध रूप ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् उस सीधी रेखा का समीकरण ज्ञात करें। जो बिन्दु $(2, -1)$ से होकर जाती है तथा धनात्मक x-axis की दिशा में 45° का कोण बनाती है।

Derive the equation of a straight line in the slope intercept form. Hence, obtain the equation of straight line passing through the point $(2, -1)$ and making an angle of 45° with the positive direction of x-axis.

- b) उस सीधी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित रेखाओं

$$2x - 3y + 5 = 0 \text{ तथा } x + y - 1 = 0$$

के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर गुजरती है और रेखा

$$3x + 4y - 7 = 0 \text{ पर लम्ब है।}$$

Find the equation of a straight line which passes through the point of intersection of the lines

$$2x - 3y + 5 = 0 \text{ and } x + y - 1 = 0$$

and is perpendicular to the line

$$3x + 4y - 7 = 0$$

[10]





3. निम्नलिखित निश्चित समाकल का मान ज्ञात कीजिए।

[10]

Evaluate the definite integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos x} dx$$

4. सदिश त्रिगुणन की परिभाषा दीजिए तथा उसकी सर्वसमिता सिद्ध कीजिए अर्थात्

[10]-

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Define vector triple product and establish

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

खण्ड - ब / Section - B

1. a) सिद्ध करें कि एक सीमित परिमित समूह के प्रत्येक तत्व का क्रम सीमित होता है और समूह के क्रम से कम या उसके बराबर होता है। [15]

Prove that the order of every element of a finite group is finite and is less than or equal to the order of the group.

- b) चक्रीय समूह $G = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$ के समरूपी नियमित क्रमचय समूह को निकालें। [15]

Find the regular permutation group isomorphic to the cyclic group

$$G = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$$

- c) यदि H और K समूह G के सीमित उपसमूह हैं, तो सिद्ध करें कि $O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$ [10]

If H and K are finite subgroups of a group G, then

$$O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$$





2. a) यदि G एक समूह है और H , G में सूचक 2 का एक उपसमूह है दिखाइए कि H एक सामान्य उपसमूह है। [15]

If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G , show that H is a normal subgroup of G .

- b) यदि $f: G \rightarrow G'$ एक समूह समाकारिता है और e, e' , G और G' का एकात्मक तत्व है। [15]

i) $f(e) = e'$

ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ सभी $a \in G$ के लिए

If $f: G \rightarrow G'$ be a homomorphism of groups and e, e' be the identities in G and G' respectively, then

i) $f(e) = e'$

ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \forall a \in G$

- c) दिखाइए की $O(G) = p^2$ तब G एक एबेलियन समूह है, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है। [10]

Show that if $O(G) = p^2$, then G is abelian, where p is a prime number.

3. a) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, 2, 3)$ से गुजरती है और दो समतल $x - y - z = 5$ और $2x - 5y - 3z = 7$ के लम्बवत् है। [15]

Find the equation of the plane which passes through the point $(1, 2, 3)$ and normal to the two planes $x - y - z = 5$ and $2x - 5y - 3z = 7$.

- b) समतल $2x + z + 3 = y$ में बिन्दु $(1, 3, 4)$ का छवि ज्ञात कीजिए। [10]

Find the image of the point $(1, 3, 4)$ in the plane $2x + z + 3 = y$.





- c) z अक्ष और रेखा $ax + by + cz + d = 0$, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। [15]

Find the shortest distance between the axis of z and the line $ax + by + cz + d = 0$, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$.

4. a) प्रमाणित करें की उस गोले का केन्द्र जो रेखाओं $y = mx, z = c, y = -mx, z = -c$ को स्पर्श करती है, सतह $mxy + c(1 + m^2)z = 0$ पर पड़ती है? [20]

Prove that the centre of the spheres which touches the lines $y = mx, z = c, y = -mx, z = -c$ lie upon the surface. $mxy + c(1 + m^2)z = 0$

- b) सिद्ध कीजिए कि $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ एक शंकु को दर्शाता है यदि

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d \quad [20]$$

Prove that $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ represents a cone if

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$$

5. a) यदि कोई फलन $f(x)$, $[a, b]$ पर संतत है तथा $f(a), f(b)$ के चिन्ह विपरीत है तो (a, b) में कम से कम एक ऐसा मान e अवश्य अस्तित्व में होगा जिसके लिए $f(e) = 0$. [20]

If $f(x)$ is continuous in $[a, b]$ and $f(a)$ and $f(b)$ have opposite signs, then there is atleast one value of e for which $f(e) = 0$.





- b) यदि कोई फलन $f(x)$, $[a, b]$ पर संतत हो तथा (a, b) पर अवकलनीय हो तो, (a, b) में कम से कम एक ऐसा बिन्दु C अवश्य अस्तित्व में होगा जिसके लिए $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, इसे सिद्ध कीजिए तथा इसकी ज्यामितीय व्याख्या करें। [20]

If a function $f(x)$ is continuous in $[a, b]$ and is differentiable in (a, b) , then there exist atleast one point C in (a, b) such that $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, establish this and discuss its geometrical meaning.

6. a) यदि $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ वक्र $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$ को स्पर्श करता है तो सिद्ध कीजिए कि

$$p^{\frac{m}{m-1}} = (a \cos \alpha)^{\frac{m}{m-1}} + (b \sin \alpha)^{\frac{m}{m-1}} \quad [20]$$

If $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ touches the curve $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$, then prove that

$$p^{\frac{m}{m-1}} = (a \cos \alpha)^{\frac{m}{m-1}} + (b \sin \alpha)^{\frac{m}{m-1}}$$

- b) मूल बिन्दू से वक्र $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ पर खींची गई स्पर्श रेखा और अभिलंब पर डाले गये लंब की लंबाई अगर p_1 और p_2 हो तो सिद्ध कीजिए कि $4p_1^2 + p_2^2 = a^2$. [20]

If p_1 and p_2 are lengths of the perpendicular from the origin on the tangent and

normal to the curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, then prove that $4p_1^2 + p_2^2 = a^2$.





7. a) दिखाइए कि वक्र $3ay^2 = 2x^3$ का आन्तरिक समीकरण $9s = 4a(\sec^3 \psi - 1)$ है। [15]

Show that the intrinsic equation of the curve $3ay^2 = 2x^3$ is

$$9s = 4a(\sec^3 \psi - 1)$$

- b) वक्र $p^2 = r^2 - a^2$ का आन्तरिक समीकरण ज्ञात कीजिए। [15]

Find the intrinsic equation of the curve $p^2 = r^2 - a^2$.

- c) यदि निर्देशांक अक्षों के बीच रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का अन्तः खण्ड को y-अक्ष के चारों ओर घूमता है, तब उत्पन्न सतह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [10]

The intercept of $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ between the axes of co-ordinates revolves about the y-axis. Find the area of surface generated.

