



Total No. of Printed Pages – 8

ACOME19
PAPER / पत्र – I
MATHEMATICS
गणित

SUBJECT CODE / विषय कोड : 05

Full Marks : 200

Time : 3 Hours

पूर्णांक : 200

समय : 3 घण्टे

Instructions : Attempt any five questions out of ten questions. Each question carries 40 marks. Marks distribution of each question is allotted in their right margin.

निर्देश : दस प्रश्नों में से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 40 (चालीस) अंकों का है। प्रत्येक प्रश्न का अंक वितरण उनके दाहिने तरफ आवंटित है।

1. Let $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a map given by $T(x, y, z) = (2x, 3y)$. Then,

- (i) Prove that T is a linear transformation. 15
- (ii) Find the matrix of T relative to ordered bases B_1 and B_2 where $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ and $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$. 15
- (iii) Find rank of matrix $[T]_{B_1, B_2'}$ where $B_2' = \{(1, -1), (1, 1)\}$. 10

मान लिया कि $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ एक फलन है जो $T(x, y, z) = (2x, 3y)$ द्वारा दिया गया है, तो

- (i) सिद्ध करें कि T एक रेखीय रूपांतर (लीनियर ट्रांसफार्मेशन) है।
- (ii) क्रमित आधारों B_1 और B_2 के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात करें जहाँ $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ और $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ है।
- (iii) आव्यूह $[T]_{B_1, B_2'}$ का रैंक ज्ञात करें जहाँ $B_2' = \{(1, -1), (1, 1)\}$



2. (a) Prove that eigen value of an Idempotent matrix are different from 2. 10

(b) Find A^{-1} by using Cayley-Hamilton's theorem, where $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 15

(c) Also express $2A^4 - 3A^3 + 9A^2 - 7A + 5I_2$ as a linear polynomial in A , where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 15$$

(a) सिद्ध करिए कि किसी भी आइडेम्पोटेंट मैट्रिक्स का आइगेन मान 2 से भिन्न होता है।

(b) कैले-हैमिल्टन प्रमेय के अनुप्रयोग द्वारा A^{-1} का मान ज्ञात करिए, जहाँ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) व्यंजक $2A^4 - 3A^3 + 9A^2 - 7A + 5I_2$ को A में रेखीय बहुपद के रूप में भी व्यक्त कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}।$$

3. (a) Prove that $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1} \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$. 15

(b) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$. 10

(c) Find the volume within the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ between the planes $y + z = b^2$ and $z = 0$. 15

(a) सिद्ध करें कि $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1} \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

(b) मान ज्ञात करें $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$.

(c) समतलों $y + z = b^2$ और $z = 0$ के बीच बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ के भीतर का आयतन ज्ञात करें।



4. (a) Prove that $(1, 2) \cup (2, 3]$ is neither open nor closed set.

- (b) If $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ w^2 \\ w \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \end{bmatrix}$ are eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$, then find

the eigen values of A, where $w \neq 1$ is a cube root of 1.

10

- (c) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$.

15

- (a) सिद्ध करें कि समुच्चय $(1, 2) \cup (2, 3]$ न तो खुला समुच्चय है और न ही बंद समुच्चय है।

- (b) यदि $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ w^2 \\ w \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \end{bmatrix}$ मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ के आइगेन वेक्टर्स हैं, तो A के आइगेन

मूल्यों को ज्ञात करें, जहाँ $w \neq 1$, 1 का घनमूल है।

- (c) मान ज्ञात करिए $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$.

5. (a) Prove that the point $\left(-\frac{1}{2}, 2, 0\right)$ is the circumcentre of the triangle formed by points $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$ and $(-2, 2, -1)$.

13

- (b) Prove that the plane $x + 2y - z = 4$ cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - x + z - 2 = 0$ in a circle of radius 1 unit.

13

- (c) Find the equation of the cone formed by rotating the line $2x + 3y = 6$, $z = 0$ about the y-axis.

14

- (a) सिद्ध करें कि बिन्दुओं $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$ और $(-2, 2, -1)$ को मिलाने से बने त्रिभुज का परिकेन्द्र बिन्दु $\left(-\frac{1}{2}, 2, 0\right)$ है।

- (b) सिद्ध करें कि समतल $x + 2y - z = 4$ तथा गोले $x^2 + y^2 + z^2 - x + z - 2 = 0$ के प्रतिच्छेद से बने वृत्त की त्रिज्या 1 इकाई है।

- (c) रेखा $2x + 3y = 6$, $z = 0$ को y-अक्ष के परितः घुमाने से बने शंकु का समीकरण ज्ञात करें।



6. (a) Solve : $(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$. 10

(b) Solve : $(2xy + e^x) dx - \left(\frac{e^x}{y}\right) dy = 0$. 10

(c) Using method of variation of parameters, solve $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$. 20

(a) हल करें : $(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$.

(b) हल करें : $(2xy + e^x) dx - \left(\frac{e^x}{y}\right) dy = 0$.

(c) प्राचल परिवर्तन विधि द्वारा हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x.$$

7. (a) Find particular integral of differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x \sin x$. 10

(b) Solve : $\frac{x dx + y dy}{x dy - y dx} = \sqrt{\frac{9^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$ 15

(c) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \tan x \frac{dy}{dx} + 5y = 0$. 15

(a) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x \sin x$ के पार्टिकुलर इंटीग्रल को ज्ञात करें ।

(b) हल करें : $\frac{x dx + y dy}{x dy - y dx} = \sqrt{\frac{9^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

(c) हल करें : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \tan x \frac{dy}{dx} + 5y = 0$.



8. (a) A particle of mass m is falling under the influence of gravity through a medium whose resistance is equal to 5 times the velocity. If the particle was released from rest, show that the velocity of particle at time t is

$$\frac{mg}{5} \{1 - e^{-5t/m}\}. \quad 15$$

- (b) A uniform beam of length 50 cm rests in equilibrium against a smooth vertical wall and upon a smooth peg at a distance 5 cm from the wall. Using principle of virtual work, prove that in position of equilibrium, the beam is inclined to the wall at an angle $\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1/3}$. 15

- (c) If T is the tension at any point P of a catenary and T_0 is the tension at lowest point C , then prove that

$$T^2 - T_0^2 = W^2.$$

Where W being the weight of the arc CP of the catenary.

10

- (a) एक m द्रव्यमान का कण गुरुत्व के अधीन एक माध्यम जिसका प्रतिरोधी बल कण के वेग का 5 गुना है। यदि कण को विराम स्थिति से छोड़ा जाय तो सिद्ध करें कि t समय पर कण का वेग $\frac{mg}{5} \{1 - e^{-5t/m}\}$ है।

- (b) 50 cm लम्बाई की एकसमान छड़ ऊर्ध्वाधर चिकनी दीवार तथा दीवार से 5 cm की दूरी पर स्थित खूँटी के सहारे संतुलन में है। आभासी कार्य के सिद्धांत की सहायता से सिद्ध करें कि संतुलन की स्थिति में छड़ का दीवार से झुकाव कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1/3}$ है।

- (c) यदि किसी कैटेनरी के किसी दिये गये बिन्दु P पर तनाव बल T तथा उसके न्यूनतम बिन्दु C पर तनाव बल T_0 हो, तो सिद्ध करें कि $T^2 - T_0^2 = W^2$ है, जहाँ W कैटेनरी के भाग CP (चाप) का भार है।



9. (a) Let P, Q and R be forces acting along straight lines $x = 0$, $y - z = a$; $y = 0$, $z - x = a$ and $z = 0$, $x - y = a$ respectively. Find their resultant force. Can this system be reduced to a single couple ? Support your answer. 15
- (b) Prove that $\text{grad} (\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \times \text{curl} \underline{b} + \underline{b} \times \text{curl} \underline{a} + (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{b} + (\underline{b} \cdot \nabla) \underline{a}$ where $\underline{a}$, $\underline{b}$ are vector quantities. 10
- (c) Derive Serret – Frenet Formulae. 15
- (a) मान लिया कि तीन बल P, Q तथा R क्रमशः सीधी रेखाओं $x = 0$, $y - z = a$; $y = 0$, $z - x = a$ तथा $z = 0$, $x - y = a$ की दिशा में लग रहे हैं। इनके परिणामी बल का मान ज्ञात करिए। क्या इन बलों के निकाय को एक कपल (couple) में परिवर्तित किया जा सकता है ? अपने उत्तर की व्याख्या करें।
- (b) सिद्ध करें कि $\text{grad} (\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \times \text{curl} \underline{b} + \underline{b} \times \text{curl} \underline{a} + (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{b} + (\underline{b} \cdot \nabla) \underline{a}$, जहाँ $\underline{a}$, $\underline{b}$ सदिश राशियाँ हैं।
- (c) सेरेट – फ्रेनेट सूत्र को स्थापित करें।
10. (a) Prove that the depth of centre of pressure of a Trapezium immersed in water with the side a in the surface and the parallel side b at a depth h below then surface is $\left(\frac{a + 3b}{a + 2b} \right) \frac{h}{2}$. 15
- (b) A hemi-spherical bowl is filled with water. Find horizontal fluid pressure on one half of the surface divided by a vertical diametral plane and hence prove that it is $\frac{1}{\pi}$ of magnitude of the resultant fluid thrust on the whole surface. 15
- (c) Find curvature of the curve $\vec{\gamma} = [a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta]$, where θ is a parameter and a, b are constants. 10



- (a) एक समलम्ब चतुर्भुज को इस तरह से पानी में डुबाया जाता है कि उसकी भुजा 'a' पानी के सतह पर तथा दूसरी समानांतर भुजा 'b' की पानी के सतह से गहराई h पर है तो सिद्ध करें कि उसके दाब केन्द्र की सतह से गहराई $\left(\frac{a+3b}{a+2b}\right) \frac{h}{2}$ है।
- (b) एक अर्द्धगोले में पानी भरा गया है। अर्द्धगोले को ऊर्ध्वाधर व्यासीय समतल से दो भागों में बाँटने पर उसके एक आधे हिस्से पर पड़ने वाले पानी के क्षैतिज दाब (दबाव या Pressure) को ज्ञात करें। यह भी सिद्ध करें कि यह पूरे पृष्ठ पर पड़ने वाले पानी के परिणामी थ्रस्ट (Thrust) का $\frac{1}{\pi}$ भाग है।
- (c) वक्र $\vec{r} = [a \cos\theta, a \sin\theta, b\theta]$, की वक्रता ज्ञात करिए, जहाँ θ प्राचल है और a, b नियतांक हैं।
-