Total No. of Printed Pages – 12

ACOME19

PAPER / पत्र – II

MATHEMATICS

गणित

SUBJECT CODE / विषय कोड : 09

Full Marks : 200
पूर्णांक : 200

Time : 3 Hours
समय : 3 घण्टे

Instructions : *The paper is divided into two sections* ***Section A and Section B****. Each section contains* ***eight*** *questions.* ***Candidate will have to answer any five questions selecting at least one from each section.*** *Each question carries* ***40*** *marks. Marks distribution of each question is allotted in their right margin.*

निर्देश : *प्रश्नपत्र कुल दो खंडों* ***खण्ड – A*** *तथा* ***खण्ड – B*** *में बँटा है । प्रत्येक खंड में* ***आठ*** *प्रश्न हैं ।* ***प्रत्येक खण्ड से न्यूनतम एक प्रश्न का चयन करते हुए प्रतियोगी को किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*** *प्रत्येक प्रश्न* ***40 (चालीस)*** *अंकों का है । प्रत्येक प्रश्नों के अंक वितरण उनके दाहिने तरफ आवंटित हैं ।*

Section / खण्ड – A

1. (a) Prove that a group G of order $p^m n$, where p is a prime not dividing n, has a subgroup of order p^m. 15

(b) Find the analytic function whose real part is $e^{-x}[(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y]$. 10

(c) Find the minimum value of $Z = 4x_1 + 2x_2$,

Subject to constraints $x_1 + 2x_2 \geq 2,\ 3x_1 + x_2 \geq 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6,\ x_1, x_2 \geq 0.$ 15

(a) सिद्ध करें कि $p^m n$ ऑर्डर के समूह G में p^m ऑर्डर का एक उपसमूह (subgroup) होता है जहाँ p एक अभाज्य संख्या है जो n को विभाजित नहीं करती है ।

(b) उस एनालीटिक फलन को ज्ञात करें जिसका वास्तविक भाग $e^{-x}[(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y]$ के बराबर है ।

(c) शर्तों $x_1 + 2x_2 \geq 2,\ 3x_1 + x_2 \geq 3,\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6$ एवम् $x_1, x_2 \geq 0$ के अधीन फलन $Z = 4x_1 + 2x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।

Marks
अंक

2. (a) Prove that every group of order 143 is cyclic. 10

(b) Prove that every group of order 10 has a unique normal subgroup of order 5. 10

(c) Reduce the feasible solution $x_1 = 2, x_2 = 4$ and $x_3 = 1$ of system of linear equations $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, x_1 + 4x_2 = 18$ to a basic feasible solution. 10

(d) Evaluate $\int_C \frac{dZ}{Z-3}$ where circle C is given by $|Z - 2| = 5$. 10

(a) सिद्ध करिए कि 143 ऑर्डर का प्रत्येक ग्रुप चक्रीय होता है ।

(b) सिद्ध करिए कि 10 ऑर्डर के ग्रुप में ऑर्डर 5 का उपसमूह (subgroup) अद्वितीय एवम् नॉर्मल (Normal) होता है ।

(c) रैखिक समीकरणों $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, x_1 + 4x_2 = 18$ के निकाय के फीजिबल (feasible) हलों $x_1 = 2, x_2 = 4$ तथा $x_3 = 1$ को बेसिक फीजिबल हलों में परिवर्तित करिए ।

(d) समाकल $\int_C \frac{dZ}{Z-3}$ का मान ज्ञात करें, जहाँ $|Z - 2| = 5$, वृत्त C का समीकरण है ।

3. (a) Evaluate $\int_0^\infty \frac{x^b}{1+x^2} dx$, by contour integration. 15

(b) Solve the following assignment problem : 10

Job

Machines	1	2	3	4
A	10	12	19	11
B	5	10	7	8
C	12	14	13	11
D	8	15	11	9

(c) Prove that subset $S = \{x f(x) : f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$ is a prime ideal of $\mathbb{Z}[x]$, where $\mathbb{Z}$ denotes the set of integers. 15

Marks
अंक

(a) कन्टूर समाकलन विधि की सहायता से $\int_0^\infty \frac{x^b}{1+x^2} dx$ का मान निकालिए ।

(b) निम्नलिखित असाइनमेंट समस्या का हल निकालिए :

जॉब

मशीनें		1	2	3	4
	A	10	12	19	11
	B	5	10	7	8
	C	12	14	13	11
	D	8	15	11	9

(c) सिद्ध करिए कि उपसमुच्चय $S = \{x\, f(x) : f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$, $\mathbb{Z}[x]$ का एक प्राइम आइडियल है, जहाँ $\mathbb{Z}$ पूर्णांकों का समुच्चय है ।

4. (a) Prove that R/I is an integral domain if and only if I is a prime ideal of ring R, where I is an ideal of a commutative ring R. **15**

(b) Let α be an element of $\mathbb{C}$ with minimal polynomial $1 + x + x^2$ over Q [x]. Prove that $\alpha^2 - 1 \neq 0$. Also express $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ of field Q(α) in the form a + bα, where a, b $\in$ Q. **10**

(c) Define Euclidean domains. Prove that the ring of polynomials F(x) over field F is a Euclidean domain. **15**

(a) सिद्ध करें कि R/I एक पूर्णांकीय क्षेत्र होगा यदि एवम् केवल यदि I रिंग R का एक प्राइम आइडियल है जहाँ I क्रमविनिमेयक रिंग R का आइडियल है ।

(b) मान लिया α, $\mathbb{C}$ का अवयव है जिसका मिनिमल बहुपद $1 + x + x^2 \in$ Q [x] है । सिद्ध करें कि $\alpha^2 - 1 \neq 0$ । फील्ड Q(α) के अवयव $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ को a + bα के रूप में भी व्यक्त करिए, जहाँ a, b $\in$ Q.

(c) यूक्लिडियन डोमेन को परिभाषित करिए । सिद्ध करें कि क्षेत्र F के ऊपर बहुपदों की रिंग F(x) एक यूक्लिडियन डोमेन है ।

Marks
अंक

5. (a) Prove that the function $f(z) = e^{-z^{-4}}$ $(z \neq 0)$ and $f(0) = 0$ is not analytic at $z = 0$ although Cauchy-Riemann equations are satisfied at origin. **15**

(b) Find a bilinear transformation which transforms the unit circle disc $|z| \leq 1$ onto the unit circular disc $|w| \leq 1$. **10**

(c) Expand $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ in a Laurent's series valid for the region $1 < |z| < 3$. **15**

(a) सिद्ध करिए कि फलन $f(z) = e^{-z^{-4}}$ $(z \neq 0)$ और $f(0) = 0$, बिन्दु $z = 0$ पर एनालीटिक नहीं है यद्यपि यह बिन्दु $z = 0$ कौशी–रीमान समीकरणों को संतुष्ट करता है ।

(b) उस द्विरेखीय रूपांतरणों को निकालिए जो एकांक त्रिज्या के वृत्तीय वलय $|z| \leq 1$ को एकांक वृत्तीय वलय $|w| \leq 1$ में रूपांतरित करता है ।

(c) फलन $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ को लारेंट शृंखला में व्यक्त करिए जो क्षेत्र $1 < |z| < 3$ में अनुमन्य है ।

6. (a) Solve the following L.P.P. using simplex method : **15**

Maximize $Z = 107x_1 + x_2 + 2x_3$

Subject to constraints :

$$14x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 7$$

$$16x_1 + \frac{x_2}{2} - 6x_3 \leq 5$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$$

and $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

(b) Using duality to solve the following L.P.P. : **15**

Maximize $Z = 2x_1 + x_2$

Subject to the constraints :

$$x_1 + 2x_2 \leq 10, x_1 + x_2 \leq 6, x_1 - x_2 \leq 2, x_1 - 2x_2 \leq 1$$

and $x_1, x_2 \geq 0$.

Marks
अंक

(c) A company has three plants at locations A, B and C, which supply to warehouses located at D, E, F, G and H. Monthly plant capacities are 800, 500 and 900 units respectively. Monthly warehouse requirements are 400, 400, 500 and 800 units respectively. Unit transportation costs (in rupees) are given below : 10

		To				
		D	E	F	G	H
From	A	5	8	6	6	3
	B	4	7	7	6	5
	C	8	4	6	6	4

Determine an optimum solution which minimizes the total transportation cost.

(a) सिम्प्लेक्स विधि द्वारा निम्नलिखित लीनियर प्रोग्रामिंग समस्या को हल करें :

उच्चिष्ठ $Z = 107x_1 + x_2 + 2x_3$

प्रतिबंधों के अधीन :

$$14x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 7$$

$$16x_1 + \frac{x_2}{2} - 6x_3 \le 5$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 \le 0$$

तथा $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0$

(b) ड्यूलिटी विधि की सहायता से निम्नलिखित लीनियर प्रोग्रामिंग समस्या को हल करें :

उच्चिष्ठ $Z = 2x_1 + x_2$

प्रतिबंधों के अधीन :

$x_1 + 2x_2 \le 10, x_1 + x_2 \le 6, x_1 - x_2 \le 2, x_1 - 2x_2 \le 1$ तथा $x_1, x_2 \ge 0.$

Marks
अंक

(c) एक कंपनी के तीन संयंत्र A, B तथा C जगहों पर स्थित हैं जो D, E, F, G तथा H स्थानों पर स्थित गोदामों को आपूर्ति करते हैं । संयंत्रों की मासिक क्षमताएँ क्रमश: 800, 500 तथा 900 यूनिट हैं । गोदामों की मासिक क्षमताएँ क्रमश: 400, 400, 500 तथा 800 यूनिट हैं । प्रति यूनिट ढुलाई कीमत (रुपयों में) निम्न द्वारा दिए गये हैं :

को

से		D	E	F	G	H
	A	5	8	6	6	3
से	B	4	7	7	6	5
	C	8	4	6	6	4

उस ऑप्टिमम हल को निकालें जो कुल ढुलाई को न्यूनतम रखे ।

7. (a) State and prove Cauchy's integral formula. 15

(b) State and prove fundamental theorem of group homomorphisms. 15

(c) Find the dual of following L.P.P. : 10

Maximize $Z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3$

Subject to constraints :

$$5x_1 + 6x_2 - x_3 \le 3, -2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 4,$$

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le 1, -3x_1 - 3x_2 + 7x_3 \le 6,$$

and $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

(a) कौशी के समाकल सूत्र का उल्लेख करते हुए उसे सिद्ध करें ।

(b) ग्रुप होमोमार्फिज्म के मानक प्रमेय का उल्लेख करते हुए उसे सिद्ध करें ।

(c) निम्नलिखित L.P.P. का ड्यूअल निकालें :

उच्चिष्ठ $Z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3$

प्रतिबंधों के अधीन :

$$5x_1 + 6x_2 - x_3 \le 3, -2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 4,$$

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le 1, -3x_1 - 3x_2 + 7x_3 \le 6,$$

तथा $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Marks
अंक

8. (a) Derive a predator-prey model. **15**

(b) Prove that $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$ given by $f(x) = e^x$ is a group homomorphism. Find its Kernel also. **10**

(c) Find all the basic solutions to the following system of linear equations : **15**

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5.$$

(a) प्रीडेटर-प्रे मॉडल को व्युत्पन्न करिए ।

(b) सिद्ध करिए कि फलन $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$ एक ग्रुप होमोमार्फिज्म है जहाँ $f(x) = e^x$ है । इसका करनेल भी ज्ञात कीजिए ।

(c) रेखीय समीकरणों $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$ के निकाय के सभी मूलभूत हलों को निकालें ।

Section / खण्ड – B

9. (a) Find the partial differential equation of all cones which have their vertex at the origin. Verify that $yz + zx + xy = 0$ is a surface satisfying $px + qy = z$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. **15**

(b) Construct Lagrangian function for a simple pendulum of length L. Also write the Lagrangian equation of motion. **15**

(c) Prove the following : **10**

(i) "$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$" is a tautology,

(ii) $[(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)]$ is a tautology,

where p, q and r are statements.

(a) उन शांकवों के आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात करिए जिनके शीर्ष मूल बिन्दु पर स्थित हैं । जाँच करें कि पृष्ठ $yz + zx + xy = 0$, अवकल समीकरण $px + qy = z$ को संतुष्ट करता है, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

(b) लंबाई L के सरल लोलक के लिए लैग्रांजियन फलन को ज्ञात करें । इसकी गति के लैग्रांजियन समीकरण को भी लिखें ।

(c) निम्नलिखित को सिद्ध करें :

(i) "$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$" एक टाटोलॉजी है,

(ii) $[(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)]$ एक टाटोलॉजी है,

जहाँ p, q तथा r कथन हैं ।

Marks
अंक

10. (a) Solve : $\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{dy}{xy-az}=\frac{dz}{xz+ay}$. 10

(b) Find a complete integral of $q=(z+px)^2$. 15

(c) Solve : $r+s-6t=y\cos x$. 15

(a) हल करें : $\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{dy}{xy-az}=\frac{dz}{xz+ay}$.

(b) $q=(z+px)^2$ के पूर्ण समाकल (complete integral) को ज्ञात करें ।

(c) हल करें : $r+s-6t=y\cos x$.

11. (a) Solve : $(yz+2x)\,dx+(zx-2z)\,dy+(xy-2y)\,dz=0$. 15

(b) If the Lagrangian function L does not contain time t explicitly then prove that the total energy of the conservative system is conserved. 15

(c) Define distributive lattices. Prove the following are equivalent in a lattice : 10

(i) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

(ii) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

for all $a, b, c\in L$.

(a) हल करें : $(yz+2x)\,dx+(zx-2z)\,dy+(xy-2y)\,dz=0$.

(b) यदि लैग्रांजियन फलन L में समय t एकदम से प्रकट न हो रहा हो तो सिद्ध करें कि संरक्षित निकाय की कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है ।

(c) वितरित लैटिस की परिभाषा लिखें । सिद्ध करें कि किसी भी लैटिस के निम्नलिखित समतुल्य हैं :

(i) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

(ii) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$a, b, c\in L$.

Marks
अंक

12. (a) A particle is moving in XY-plane under the influence of a central force depending only on its distance from origin. Construct its Hamiltonian function and write Hamilton's equation of motion. **15**

(b) A mass of fluid is in motion so that the lines of motion lie on the surface of coaxial cylinders; show that the equation of continuity is **15**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0$$

Where v_θ and v_z are the velocities perpendicular and parallel to z.

(c) Prove that the complex potential for a two dimensional source of strength 5 placed at origin is w = –5 log z. **10**

(a) एक कण केन्द्रीय बल के अधीन XY-समतल में गति कर रहा है जहाँ केन्द्रीय बल केवल मूल बिन्दु से कण की दूरी पर निर्भर कर रहा है । इसके हैमिल्टन फलन निकालें तथा हैमिल्टन के गति के समीकरणों को भी लिखें ।

(b) एक द्रव इस प्रकार से गति में है कि उसकी गति की रेखाएँ सह अक्षीय बेलनों के पृष्ठों पर रहती हैं, तो सिद्ध करें कि उसकी सततता का समीकरण $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0$ है, जहाँ v_θ तथा v_z, z-अक्ष के लम्बवत् तथा समांतर वेग हैं ।

(c) सिद्ध करिए कि मूल बिन्दु पर 5 क्षमता के द्विविमीय स्रोत का कॉम्प्लेक्स पोटेंशियल w = –5 log z है ।

13. (a) In a Boolean Algebra B, prove that a + (b + c) = (a + b) + c and a · (b · c) = (a · b) · c. for all a, b, c ∈ B. **10**

(b) Draw a Karnaugh map to represent the Boolean function $AC' + A'C + B$. **15**

(c) Define bi-partite graphs. Prove that the maximum number of edges in a complete bi partite graph with v vertices is $\frac{v^2}{4}$. **15**

(a) किसी भी दिए गए बुलियन अलजेब्रा B में सिद्ध करें कि a + (b + c) = (a + b) + c तथा a · (b · c) = (a · b) · c, a, b, c ∈ B.

(b) बुलियन फलन $AC' + A'C + B$ को निरूपित करने वाले करनॉफ मैप का आरेख बनाएँ ।

(c) बाइ–पार्टाइट ग्राफ की परिभाषा लिखिए । सिद्ध करिए कि v शीर्ष वाले कम्प्लीट बाइ–पार्टाइट ग्राफ में महत्तम भुजाओं की संख्या $\frac{v^2}{4}$ होती है ।

Marks
अंक

14. (a) Prove that a connected graph G is an Euler graph if and only if every vertex in G is of even degree. 15

(b) Suppose that a rigid body is turning about a fixed point O with angular velocity $\vec{w} = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k}$. Prove that its kinetic energy T is

$$T = \frac{1}{2}[A\,w_x^2 + B\,w_y^2 + C\,w_z^2 - 2F\,w_y\,w_z - 2G\,w_z\,w_x - 2H\,w_x\,w_y.$$

Where A, B, C and F, G, H are moments and product of inertia for x, y, z axes respectively. 15

(c) Prove that a tree with n vertices has n – 1 edges. 10

(a) सिद्ध करें कि एक अविभाजित ग्राफ G (connected graph) आइलर ग्राफ होता है यदि एवम् केवल यदि G में सभी शीर्षों की डिग्री समसंख्या हो ।

(b) मान लिया कि एक दृढ़ पिण्ड नियत बिन्दु O के परित: $\vec{w}$ कोणीय वेग से घूम रहा है । सिद्ध करें कि उसकी कुल गतिज ऊर्जा $T = \frac{1}{2}[A\,w_x^2 + B\,w_y^2 + C\,w_z^2 - 2F\,w_y\,w_z - 2G\,w_z\,w_x - 2H\,w_x\,w_y$ है, जहाँ $\vec{w} = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k}$ तथा A, B, C, F, G, H क्रमश: x, y, z अक्षों के लिए क्रमश: जड़त्व तथा गुणन आघूर्ण हैं ।

(c) सिद्ध करें कि n शीर्षों वाले ट्री (Tree) में n – 1 भुजाएँ होती हैं ।

15. (a) If A and B are any two events and are not disjoint then prove that

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Where $P(x)$ denotes the probability of event x. 15

(b) An integer is choosen at random from first two hundred digits. What is the probability that the integer is divisible by 6 or 8 ? 15

(c) If $E_1, E_2, \ldots, E_n$ are mutually disjoint events with $P(E_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, then for any arbitrary event A which is a subset of $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ such that $P(A) > 0$, we have

$$P(Ei/A) = \frac{P(E_i)\,P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)}.$$ 10

Marks
अंक

(a) यदि A तथा B कोई दो घटनाएँ हैं तथा विभिन्न नहीं हैं तो सिद्ध करें कि

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

जहाँ $P(x)$, घटना x की प्रायिकता को प्रदर्शित करता है ।

(b) एक पूर्णांक को प्रथम 200 अंकों में से बिना विचार किए चुनना है । उस पूर्णांक की प्रायिकता क्या है जो 6 या 8 से विभाजित हो ?

(c) यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ परस्पर विभिन्न घटनाएँ हैं जहाँ $P(E_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ तो किसी स्वेच्छ घटना A, जो $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ का उपसमुच्चय इस तरह से हो कि $P(A) > 0$, के लिए

$$P(Ei/A) = \frac{P(E_i)\,P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)}$$ होता है ।

16. (a) Prove that the geometric mean G of the distribution : 15

$dF = 6(2 - x)(x - 1)dx, \; 1 \leq x \leq 2$

is given by $G = \frac{1}{16} e^{19/6}$

(b) For any continuous distribution, show that the mean deviation is least when measured from median. 15

(c) Without using truth table, prove that statements $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ and $(\neg p) \wedge (\neg q)$ are logically equivalent, where $\neg p$ denotes negation of p. 10

(a) सिद्ध करिए कि वितरण $dF = 6(2 - x)(x - 1)dx, \; 1 \leq x \leq 2$ का गुणोत्तर माध्य G,

$G = \frac{1}{16} e^{19/6}$ द्वारा प्राप्त होता है ।

(b) किसी भी सतत वितरण के लिए सिद्ध करिए कि जब यह माध्यिका से मापा जाता है तो माध्य विचलन न्यूनतम होता है ।

(c) सत्यता सारणी के प्रयोग के बिना सिद्ध करिए कि कथन $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ तथा $(\neg p) \wedge (\neg q)$ तर्कों की कसौटी पर समतुल्य है, जहाँ $\neg p$, कथन p के ऋणात्मक कथन को प्रदर्शित करता है ।