



Total No. of Printed Pages - 7

1ST00005

पत्र - I / PAPER - I
GAN4-ST
सांख्यिकी
STATISTICS

पूर्णांक : 200

Full Marks : 200

समय : 3 घण्टे

Time : 3 Hours

निर्देश:

1. प्रश्न-पत्र दो खण्डों में विभक्त है। परीक्षार्थी को खण्ड - अ से चार अनिवार्य और खण्ड - ब से चार विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर देना है। खण्ड - अ के अनिवार्य प्रश्न में 4 विषयनिष्ठ प्रश्न हैं जिसमें प्रत्येक विषयनिष्ठ प्रश्न के 10 अंक हैं। इसके अतिरिक्त खण्ड - ब के 7 विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों में से किन्हीं 4 विषयनिष्ठ प्रश्न का उत्तर दें जिनमें प्रत्येक प्रश्न के 40 अंक हैं। वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर वर्णनात्मक रूप से लिखें।
2. उत्तर पुस्तिका में प्रत्येक खण्ड व प्रश्न के लिये पेज निर्धारित हैं। अभ्यर्थियों को यह निर्देश दिया जाता है कि प्रश्नों के उत्तर निर्धारित पेज पर ही लिखना सुनिश्चित करेंगे। यदि अभ्यर्थी प्रश्नों के उत्तर निर्धारित पेज पर नहीं लिखते हैं तो उक्त परिस्थिति में उस प्रश्न के उत्तर की जाँच नहीं की जायगी एवं इसकी समस्त जिम्मेवारी स्वयं अभ्यर्थी की होगी।

INSTRUCTION :

1. The question paper is divided into two sections. The candidates will be required to answer **Four** compulsory **subjective** questions from **Section - A** and **four** optional **subjective** questions from **Section - B**. There shall be compulsory **Four subjective** type questions, each of **10 marks**. In addition, there shall be **7** optional **subjective** questions in **Section - B**, of which candidates will be required to answer only **4 subjective** questions, each of **40** marks. The optional questions shall be answered in the descriptive form.
2. The pages are reserved for each section and their respective questions in the answer booklet. The candidates are instructed to write the answers of the questions reserved for that question only. If the candidates do not write the answer of the question on the reserved page, then the answer of that particular question will not be evaluated and the entire responsibility for non-evaluation of that answer will be of the candidates only.





खण्ड - अ / Section - A

1. मान लीजिए (Ω, F, P) एक प्रायिकता स्थान है जहाँ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F = 2^n$ तथा $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $i = 1, \dots, 6$ एक यादृच्छिक चर $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ निम्न प्रकार परिभाषित है। [10]

$$X(w) = \begin{cases} w & w \leq 3 \\ w-3 & w > 3 \end{cases}$$

निम्नलिखित का उत्तर दीजिए।

- i) सिद्ध कीजिए कि X एक मापन योग्य फलन (measurable function) है।
- ii) X का प्रायिकता द्रव्यमान फलन (pmf) ज्ञात कीजिए।
- iii) वितरण फलन $F_X(X)$ ज्ञात कीजिए।
- iv) $E(X)$ तथा $\text{Var}(X)$ ज्ञात कीजिए।
- v) क्या घटनाएँ $\{X = 1\}$ और $\{X = 2\}$ स्वतंत्र है। स्पष्ट कीजिए।

Let (Ω, F, P) be a probability space where $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F = 2^n$ and $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $i = 1, \dots, 6$

Define a random variable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$X(w) = \begin{cases} w & w \leq 3 \\ w-3 & w > 3 \end{cases}$$

Answer the following.

- i) Show that X is a measurable function.
- ii) Find the probability mass function (pmf) of X .
- iii) Obtain the distribution function $F_X(X)$.
- iv) Compute $E(X)$ and $\text{Var}(X)$.
- v) Determine whether the events $\{X = 1\}$ and $\{X = 2\}$ are independent, justify.





2. मान लीजिए X और Y दो सतत यादृच्छिक चर हैं जिनका संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है। [10]

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

निम्नलिखित का उत्तर दीजिए।

- सत्यापित कीजिए कि यह $f_{xy}(x, y)$ एक वैध संयुक्त pdf है।
- सीमान्त घनत्व फलन $f_x(x)$ तथा $f_y(y)$ ज्ञात कीजिए।
- सशर्त घनत्व $f_{y|x}(y|x)$ ज्ञात कीजिए।
- क्या X और Y स्वतंत्र है, स्पष्ट कीजिए।
- $E(Y|X = x)$ ज्ञात कीजिए।

Let X and Y be continuous random variables with a joint probability density function

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Answer the following.

- Verify that $f_{xy}(x, y)$ is a valid joint pdf.
- Find the marginal density functions $f_x(x)$ and $f_y(y)$.
- Obtain the conditional density $f_{y|x}(y|x)$.
- Are X and Y independent? Justify.
- Compute $E(Y|X = x)$.

3. मान लीजिए $\{x_n\}$ यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है जहाँ $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ [10]

निम्नलिखित का उत्तर दीजिए।

- सिद्ध कीजिए कि $X_n \rightarrow 0$ प्रायिकता में अभिसरित होता है।
- क्या X_n लगभग सर्वत्र (almost every where) अभिसरित होता है? Borel-Cantelli Lemma का उपयोग कर स्पष्ट कीजिए।
- क्या X_n माध्य वर्ग (अर्थात् L^2) में अभिसरित होता है।
- प्रायिकता में लगभग सर्वत्र तथा p वाँ माध्य में अभिसरण के परस्पर संबंध लिखिए।
- क्या माध्य में अभिसरण से प्रायिकता में अभिसरण प्राप्त होता है। स्पष्ट कीजिए।





Let $\{x_n\}$ be a sequence of random variables defined on a probability space such that

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Answer the following.

- Show that $X_n \rightarrow 0$ in probability.
- Does X_n converges almost everywhere? Justify the use of the Borel-Cantelli Lemma.
- Does X_n converges in mean square {i.e., L^2 }?
- State the relationship between convergency in probability, almost sure convergency, and convergence in p-th mean.
- Does convergence in mean imply convergency in probability? Explain.

4. मान लीजिए $\{X_i\}_{i \geq 1}$ स्वतंत्र तथा समान वितरण वाले यादृच्छिक चर हैं जहाँ $E(X_i) = \mu$ तथा $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ [10]

परिभाषित करें $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

निम्नलिखित का उत्तर दीजिए।

- चेबिसेव का दुर्बल महासंख्या नियम (WLLN) कथन और प्रमाण दीजिए।
- महासंख्या नियम {SLLN} का कोल्मोगोरोव रूप लिखिए।
- SLLN के प्रमाण में Kolmogorov के three series theorem की भूमिका संक्षेप में समझाइए।

Let $\{X_i\}_{i \geq 1}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with $E(X_i) = \mu$ and $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

Let $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

Answer the following.

- State and prove Chebyshev's Weak Law of Large Numbers.
- State the Strong Law of Large Numbers {SLLN} in Kolmogorove's form.
- Briefly explain the role of Kolmogorove's three series theorems in proving SLLN.



**खण्ड - ब / Section - B****[4 x 40 = 160]**

1. a) यह सिद्ध कीजिए कि प्रथम कोटि आंशिक सहसंबंध गुणांक $r_{XY.Z}$ उन अवशेषों (residuals) की बीच के सहसंबंध समान होता है। जो X और Y को क्रमशः Z पर प्रतिगमन (regression) करके प्राप्त होता है। **[20]**

Show that the first-order partial correlation $r_{XY.Z}$ is equivalent to the correlation between the residuals obtained by regression X and Y separately on Z.

- b) निम्नलिखित न्यूनतम वर्ग प्रतिगमन (least square regression) समीकरणों से बीजीय रूप यह परिणाम व्युत्पन्न कीजिए। **[20]**

$$X = a_1 + b_1Z + e_1, Y = a_2 + b_2Z + e_2$$

और सिद्ध कीजिए कि अवशेषों e_1 और e_2 के मध्य सहसंबंध $r_{e_1e_2}$ के बराबर है।

Derive this result algebraically starting from the least square regression equation

$$X = a_1 + b_1Z + e_1, Y = a_2 + b_2Z + e_2$$

and show that the correlation between the residuals e_1 and e_2 equals $r_{XY.Z}$.

2. a) यह सिद्ध कीजिए कि n संतंत्रघातीय (exponential) यादृच्छिक चरों का योग (Gamma distribution) का अनुसरण करता है। **[20]**

Prove that the sum of n independent exponential (λ) random variable follows a Gamma (n, λ) distribution.

- b) यदि $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ तो, वितरण का मोड (mode) ज्ञात कीजिए। यह भी चर्चा कीजिए कि α के विभिन्न मानों के अनुसार वितरण का आकार कैसे बदलता है। **[20]**

For $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ derive the mode of the distribution. Discuss how the shape of the distribution changes with different value of α .

3. a) हाइपर जियोमेट्रीक वितरण (hypergeometric distribution) को परिभाषित कीजिए तथा उसका माध्य और विचरण द्विपद वितरण (binomial distribution) के समान हो जाता है। **[20]**

Define the hypergeometric distribution and derive its mean and variance.

- b) हाइपरजियोमेट्रीक मॉडल के वास्तविक जीवन उपयोग की व्याख्या कीजिए। (जैसे औद्योगिक गुणवत्ता प्ररीक्षण या जैविक नमूना संग्रह) **[20]**

Discuss one real-life application of the hypergeometric model in industrial quality control or biological sampling.





4. a) द्विपद वितरण $X \sim B(n, p)$ का माध्य वितरण तथा क्षण उत्पन्न करने वाला फलन (MGF) व्युत्पन्न कीजिए। [20]

Derive the mean, variance and Moment Generating Function (MGF) of the Binomial distribution.

$$X \sim B(n, p)$$

- b) यह सिद्ध कीजिए कि जब $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ तथा $np = \lambda$ नियत रहे तब द्विपद वितरण प्वांसा वितरण (Poisson distribution) की ओर अग्रसर होता है। [20]

Prove that binomial distribution tends to Poisson distribution under the condition $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ such that $np = \lambda$ remain constant.

5. a) सांख्यिकीय प्रसरण (statistical dispersion) की अवधारणा को परिभाषित कीजिए तथा व्याख्या कीजिए। विचरण (variance) का बीजीय सूत्र व्युत्पन्न कीजिए और सिद्ध कीजिए कि

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

जहाँ X एक यादृच्छिक चर है। [20]

Define and explain the concept of statistical dispersion. Derive the algebraic formula for variance and show that

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

for a random variable X .

- b) मानक विचलन (standard deviation), विचरण (variance) और माध्य विचलन (mean deviation) के मध्य संबंध स्पष्ट कीजिए तथा यह सिद्ध कीजिए कि परिवर्तन गुणांक (Coefficient of Variation) मापन की इकाई से स्वतंत्र होता है। [20]

Discuss the relationship between standard deviation, variance and mean deviation and show that the Coefficient of Variation (C.V.) is independent of the unit of measurement.

6. a) दो सतत यादृच्छिक चरों X और Y का संयुक्त प्रायिकता वितरण (joint probability distribution) परिभाषित कीजिए। संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन $f_{xy}(x, y)$ से परिधीय प्रायिकता घनत्व फलन $f_x(x)$ और $f_y(y)$ व्युत्पन्न कीजिए। [20]

Define the joint probability distribution of two continuous random variables X and Y , Derive the probability density function $f_x(x)$ and $f_y(y)$ from the joint pdf $f_{xy}(x, y)$





- b) निम्नलिखित संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन के लिए

$$f_{xy}(x, y) = \sigma xy, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 - x$$

यह सिद्ध कीजिए कि यह एक वैध प्रायिकता घनत्व फलन है। इसके परिधीय प्रायिकता घनत्व फलन $f_x(x)$ और $f_y(y)$ ज्ञात कीजिए तथा $E(x)$, $E(y)$ और सहप्रसरण $\text{cov}(x, y)$ की गणना कीजिए।

For the joint pdf

[20]

$$f_{xy}(x, y) = \sigma xy, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 - x$$

Verify that it is a valid density function obtain the marginal pdf $f_x(x)$ and $f_y(y)$ and compute $E(x)$, $E(y)$ and $\text{cov}(x, y)$.

7. a) पारस्परिक रूप से अन्नय (mutually exclusive) एवं पूर्ण घटनाओं $B_1, B_2, \dots, B_n$ के लिए बेयस प्रमेय (Baye's theorem) को कथित कीजिए तथा प्रमाणित कीजिए। [20]

State and prove Baye's theorem for mutually exclusive and exhaustive events $B_1, B_2, \dots, B_n$.

- b) बेयस प्रमेय की सीमाएं चर्चा कीजिए जब

[20]

- प्रारंभिक प्रायिकताएँ व्यक्तिपरक है।
- आधार दर बहुत कम हो।
- स्वतंत्रता का अनुमान गलत हो।

Critical discuss the limitation of Bayes theorem when

- Prior probabilities are subjective
- Base rate is extremely small
- Independent assumption are violated





SPACE FOR ROUGH WORK

