



Total No. of Printed Pages -6

2MT00014

पत्र - II / PAPER - II
GAN4-MT
गणित
MATHEMATICS

पूर्णांक : 200

Full Marks : 200

समय : 3 घण्टे

Time : 3 Hours

निर्देश:

1. प्रश्न-पत्र दो खण्डों में विभक्त है। परीक्षार्थी को खण्ड - अ से चार अनिवार्य और खण्ड - ब से चार विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर देना है। खण्ड - अ के अनिवार्य प्रश्न में 4 विषयनिष्ठ प्रश्न हैं जिसमें प्रत्येक विषयनिष्ठ प्रश्न के 10 अंक हैं। इसके अतिरिक्त खण्ड - ब के 7 विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों में से किन्हीं 4 विषयनिष्ठ प्रश्न का उत्तर दें जिनमें प्रत्येक प्रश्न के 40 अंक हैं। वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर वर्णनात्मक रूप से लिखें।
2. उत्तर पुस्तिका में प्रत्येक खण्ड व प्रश्न के लिये पेज निर्धारित हैं। अभ्यर्थियों को यह निर्देश दिया जाता है कि प्रश्नों के उत्तर निर्धारित पेज पर ही लिखना सुनिश्चित करेंगे। यदि अभ्यर्थी प्रश्नों के उत्तर निर्धारित पेज पर नहीं लिखते हैं तो उक्त परिस्थिति में उस प्रश्न के उत्तर की जाँच नहीं की जायगी एवं इसकी समस्त जिम्मेवारी स्वयं अभ्यर्थी की होगी।



INSTRUCTION :

1. The question paper is divided into two sections. The candidates will be required to answer **Four** compulsory **subjective** questions from **Section - A** and **four** optional **subjective** questions from **Section - B**. There shall be compulsory **Four subjective** type questions, each of **10 marks**. In addition, there shall be **7** optional **subjective** questions in **Section - B**, of which candidates will be required to answer only **4 subjective** questions, each of **40** marks. The optional questions shall be answered in the descriptive form.
2. The pages are reserved for each section and their respective questions in the answer booklet. The candidates are instructed to write the answers of the questions reserved for that question only. If the candidates do not write the answer of the question on the reserved page, then the answer of that particular question will not be evaluated and the entire responsibility for non-evaluation of that answer will be of the candidates only.





खण्ड - अ / Section - A

1. सामान्य उपसमूह की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि एबेलियन समूह का प्रत्येक उपसमूह सामान्य होता है।
जाँच कीजिए कि उपसमूह [10]

$$H = \{0, 3\}$$

समूह $(Z_6, +)$ का सामान्य उपसमूह है या नहीं।

Define a normal subgroup. Prove that every subgroup of an abelian group is normal.

Determine whether the subgroup

$$H = \{0, 3\}$$

of the group $(Z_6, +)$ is normal.

2. काउशी का अवशेष प्रमेय लिखिए तथा अवशेष प्रमेय का प्रयोग कर समाकल का मान ज्ञात कीजिए। [10]

$$\oint_C \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} dz,$$

जहाँ C वृत्त $|z| = 3$ है।

State Cauchy's residue theorem and evaluate the integral

$$\oint_C \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} dz,$$

Where C is the circle $|z| = 3$, using the residue theorem.

3. चतुर्थ-कोटि रनगे कुट्टा विधि का प्रयोग कर $y(0.2)$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि [10]

$$\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$$

Using the fourth-order Runge-Kutta method, find the value of $y(0.2)$ given

$$\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$$

4. संरक्षणीय तंत्र के लिए लाग्रान्ज के गति समीकरण लिखिए तथा उसमें प्रयुक्त पदों की व्याख्या कीजिए। लाग्रान्ज समीकरणों की सहायता से लंबाई l वाले सरल लोलक की गति का समीकरण व्युत्पन्न कीजिए। [10]

State Lagrange's equations of motion for a conservative system. Clearly explain the terms involved. Using Lagrange's equations, derive the equation of motion of a simple pendulum of length l oscillating in a vertical plane.



**खण्ड - ब / Section - B****[4 x 40 = 160]**

1. a) एक श्यान तरल पदार्थ के लिए नेवियर स्टोक्स समीकरण का वर्णन करें। [20]

Derive Navier-Stoke's equation of motion for a viscous fluid.

- b) दर्शाइए कि किसी तरल पदार्थ के एक भाग की कुल ऊर्जा में परिवर्तन की दर, बाह्य दबाव द्वारा सीमा पर किए गए कार्य के बराबर होती है, बशर्ते बाह्य बल संरक्षी हो। [20]

Show that the rate of change of total energy of a portion of a fluid is equal to the work done by external pressure on the boundary provided the external forces are conservative.

2. a) द्रव का एक द्रव्यमान त्रिज्या 'a' के एक ठोस गोले के घेरे हुए है और इसकी बाहरी सतह जो कि त्रिज्या 'b' का संकेद्रित गोला है, दिये गये स्थिर दाब ρ के अधीन है द्रव पर कोई अन्य बल क्रियाशील नहीं है। तब ठोस गोला अचानक संकेद्रित गोले में सिकुड़ जाता है तब गोले पर अनुवर्ती गति और आवेगपूर्ण क्रिया प्राप्त करना है। [20]

A mass of liquid surrounds a solid sphere of radius 'a', and its outer surface, which is concentric sphere of radius 'b', is subject to a given. Constant pressure ρ , no other forces being action on the liquid. Then solid sphere suddenly shrink in to concentric sphere; it is required to determine the subsequent motion and the impulsive action on the sphere.

- b) वृत्त $(x + \alpha)^2 + (y - 4\alpha)^2 = 8\alpha^2$ के रूप में एक दृढ़ सीमा के भीतर y-अक्ष के साथ बिन्दु $(0, 3\alpha)$ पर बल μ के द्विगणन के कारण एक तरल गति होती है। दिखाएं कि वेग क्षमता

$$\mu \left[\frac{4(x - 3\alpha)}{(x - 3\alpha)^2 + y^2} + \frac{y - 3\alpha}{x^2 + (y - 3\alpha)^2} \right] \text{ है।} \quad [20]$$

Within a rigid boundary in the form of the circle $(x + \alpha)^2 + (y - 4\alpha)^2 = 8\alpha^2$, there is liquid motion due to doublet of strength μ at the point $(0, 3\alpha)$ with its axis of y. Show that the velocity potential is

$$\mu \left[\frac{4(x - 3\alpha)}{(x - 3\alpha)^2 + y^2} + \frac{y - 3\alpha}{x^2 + (y - 3\alpha)^2} \right]$$





3. a) न्यूटन-रफसन्स के विधि का प्रयोग करे समीकरण $x^4 - x - 10 = 0$ का मूल ज्ञात करे जो दशमलव के तीसरे स्थान तक $x = 2$ के निकट हो। [20]

By using Newton-Raphson's method, find the root of the equation $x^4 - x - 10 = 0$ which is near to $x = 2$, correct to three places of decimals.

- b) इटरेशन विधि का प्रयोग करके समीकरण $3x - \cos x - 1 = 0$ को हल कीजिए। [20]

Solve the equation $3x - \cos x - 1 = 0$ by applying iterative method.

4. a) अपने पथ पर एक बिंदु से दूरी 's' पर स्थित एक कण का वेग v नीचे दी गई तालिका द्वारा दिया गया है। [20]

s (in m)	0	10	20	30	40	50	60
v (in m/s)	47	58	64	65	61	52	38

सिम्पसन 1/3 नियम का उपयोग करके 60 मीटर की यात्रा में लगने वाले समय का अनुमान लगाइए।

The velocity v of a particle at a distance 's' from a point on its path is given by the table below.

s (in m)	0	10	20	30	40	50	60
v (in m/s)	47	58	64	65	61	52	38

Estimate the time taken to travel 60 meters by using Simpson's 1/3 rule.

- b) ट्रपेजोइडल नियम के द्वारा $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ के अनुमानित मान की गणना करें। [20]

Calculate the approximate value of $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ by Trapezoidal rule.

5. a) यदि $f(x)$ एक तृतीय घात वाला बहुपद x में है, $f(0), f(1), f(2)$ और $f(3)$ के पद में $\int_0^1 f(x) \, dx$ को दर्शाते हुए ज्ञात करें। इस परिणाम को प्रयोग करके दिखाएं [20]

$$\int_1^2 f(x) \, dx = \frac{1}{24} [-f(0) + 13f(1) + 13f(2) - f(3)]$$

If $f(x)$ is a polynomial in x of third degree, find an expression for $\int_0^1 f(x) \, dx$ in terms of $f(0), f(1), f(2)$ and $f(3)$. Use this result to show that

$$\int_1^2 f(x) \, dx = \frac{1}{24} [-f(0) + 13f(1) + 13f(2) - f(3)]$$





- b) रैखिक रेखाओं के समूह को गौसियन एलिमिनेशन तरीके से हल कीजिए। [20]

$$x + y + z = 9$$

$$2x - 3y + 4z = 13$$

$$3x + 4y + 5z = 40$$

Solve the system of linear equations by using Gaussian elimination method

$$x + y + z = 9$$

$$2x - 3y + 4z = 13$$

$$3x + 4y + 5z = 40$$

6. a) हल कीजिए $\frac{dx}{x^2 - y^2} = \frac{dy}{y^2 - 2x} = \frac{dz}{z^2 - xy}$ [20]

$$\text{Solve } \frac{dx}{x^2 - y^2} = \frac{dy}{y^2 - 2x} = \frac{dz}{z^2 - xy}$$

- b) $z = 0$ के समांतर समतलों के परिवार के साथ इसके प्रतिच्छेदन के शंकु $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ पर आर्थोगोनल प्रक्षेप पथ ज्ञात करें। [20]

Find the orthogonal trajectories on the cone $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ of its intersection with the family of planes parallel to $z = 0$.

7. a) चारपिट विधि द्वारा आंशिक अंतर समीकरण $p^2 x(x-1) + 2pqxy + q^2 y(y-1) - 2pxz - 2qyz + z^2 = 0$ को हल करें। [15]

Solve by Charpit's method the partial differential equation

$$p^2 x(x-1) + 2pqxy + q^2 y(y-1) - 2pxz - 2qyz + z^2 = 0$$

- b) उष्मा प्रवाह समीकरण के सामान्य $R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$ और चर पृथक्करण के विधि द्वारा हल कीजिए। [10]

Find the general solution of heat flow equation $R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$ by method of separation of variables.





c) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए।

[15]

$$\{(2xy + y^2) + yz + z^2\} dx + \{(x^2 + 2xy) + xz + z^2\} dy + \{xy + 2xz + 2yz\} dz = 0$$

सिद्ध कीजिए कि P, Q, R, x, y, z के समघात फलन हैं। जाँच कीजिए की यह समीकरण पूर्ण/सटीक (exact) है। $\phi(x, y, z)$ ज्ञात कीजिए तथा पूर्ण हल निकालिए।

Solve the differential equation

$$\{(2xy + y^2) + yz + z^2\} dx + \{(x^2 + 2xy) + xz + z^2\} dy + \{xy + 2xz + 2yz\} dz = 0$$

Show that P, Q, R are homogeneous functions of x, y, z. Verify that the equation is exact, i.e., a total differential equation. Find the potential function $\phi(x, y, z)$ and hence obtain the complete solution.

