



Total No. of Printed Pages - 7

1MT00001

पत्र - I / PAPER - I

GAN4-MT

गणित

MATHEMATICS

पूर्णांक : 200

Full Marks : 200

समय : 3 घण्टे

Time : 3 Hours

निर्देश:

1. प्रश्न-पत्र दो खण्डों में विभक्त है। परीक्षार्थी को खण्ड - अ से चार अनिवार्य और खण्ड - ब से चार विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर देना है। खण्ड - अ के अनिवार्य प्रश्न में 4 विषयनिष्ठ प्रश्न हैं जिसमें प्रत्येक विषयनिष्ठ प्रश्न के 10 अंक हैं। इसके अतिरिक्त खण्ड - ब के 7 विषयनिष्ठ वैकल्पिक प्रश्नों में से किन्हीं 4 विषयनिष्ठ प्रश्न का उत्तर दें जिनमें प्रत्येक प्रश्न के 40 अंक हैं। वैकल्पिक प्रश्नों का उत्तर वर्णनात्मक रूप से लिखें।
2. उत्तर पुस्तिका में प्रत्येक खण्ड व प्रश्न के लिये पेज निर्धारित हैं। अभ्यर्थियों को यह निर्देश दिया जाता है कि प्रश्नों के उत्तर निर्धारित पेज पर ही लिखना सुनिश्चित करेंगे। यदि अभ्यर्थी प्रश्नों के उत्तर निर्धारित पेज पर नहीं लिखते हैं तो उक्त परिस्थिति में उस प्रश्न के उत्तर की जाँच नहीं की जायगी एवं इसकी समस्त जिम्मेवारी स्वयं अभ्यर्थी की होगी।

INSTRUCTION :

1. The question paper is divided into two sections. The candidates will be required to answer **Four** compulsory **subjective** questions from **Section - A** and **four** optional **subjective** questions from **Section - B**. There shall be compulsory **Four subjective** type questions, each of **10 marks**. In addition, there shall be **7** optional **subjective** questions in **Section - B**, of which candidates will be required to answer only **4 subjective** questions, each of **40 marks**. The optional questions shall be answered in the descriptive form.
2. The pages are reserved for each section and their respective questions in the answer booklet. The candidates are instructed to write the answers of the questions reserved for that question only. If the candidates do not write the answer of the question on the reserved page, then the answer of that particular question will not be evaluated and the entire responsibility for non-evaluation of that answer will be of the candidates only.



**खण्ड – अ / Section - A****[10 x 4 = 40]**

1. हरमिशियन तथा स्क्व-हर्मिटियन आव्यूह की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह A को अद्वितीय रूप से एक हर्मिटियन तथा एक स्क्व-हर्मिटियन आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। [10]

Define Hermitian and skew-Hermitian matrices. Prove that any square matrix A can be uniquely expressed as the sum of a Hermitian matrix and a skew Hermitian matrix.

2. तीन सदिशों के स्केलर त्रिगुणन की परिभाषा दीजिए तथा इसका ज्यामितीय अर्थ स्पष्ट कीजिए। निम्नलिखित सदिशों का स्केलर त्रिगुणन ज्ञात कीजिए। [10]

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

तथा उनसे बने समांतर चतुर्भुजाय का आयतन ज्ञात कीजिए।

Define the scalar triple product of three vector and state its geometrical interpretation. Evaluate the scalar triple product of the vectors

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

and hence determine the volume of the parallelepiped formed by them.

3. किसी अंतरिक्ष वक्र की वक्रता तथा मरोड़ की परिभाषा दीजिए। सेरेट-फ्रेनेट सूत्र लिखिए। कार्य-ऊर्जा प्रमेय का कथन लिखिए। किसी कण की गतिज ऊर्जा का व्यंजक प्राप्त कीजिए तथा उसका भौतिक महत्व स्पष्ट कीजिए। [10]

Define curvature and torsion of a space curve. Write the Serret-Frenet formulae. State the work-energy theorem. Obtain the expression for the kinetic energy of a particle and explain its physical significance.

4. चर पृथक्करण विधि द्वारा अवकल समीकरण को हल करने की विधि समझाइए। इस विधि की सीमायें भी लिखिए। निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए। [10]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

जहाँ $x = 1$ पर $y = 1$ है।





Explain the method of solving a variable separable differential equation. Mention the limitations of this method. Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

Given that $y = 1$ when $x = 1$.

खण्ड - ब / Section - B

[4 x 40 = 160]

1. a) निम्नलिखित को हल करें।

Solve the following.

i) $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0, y(1) = 0$ [15]

ii) $(x - 2y + 1)dx + (4x - 3y - 6)dy = 0$ [10]

- b) धनात्मक निश्चित द्विघात रूप की परिभाषा दीजिए। किसी द्विघात रूप की धनात्मक निश्चितता जाँचने हेतु सिलवेस्टर का मापदंड लिखिए। जाँच कीजिए कि द्विघात रूप

$$Q = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

धनात्मक निश्चित है या नहीं। इसे उसके कैनोनिकल रूप में बदलिए तथा अपने निष्कर्ष को उचित ठहराइए। [15]

Define a positive definite quadratic form. State Sylvester's criterion for testing the positive definiteness of a quadratic form. Examine whether the quadratic form

$Q = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$ is positive definite. Reduce it to its canonical form and justify your conclusion.

2. a) निम्नलिखित को हल करें।

Solve the following.

i) $y(2x^2 - xy + 1)dx + (x - y)dy = 0$ [10]

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x^2)} \left(e^{\tan^{-1}x} - y \right)$ [10]





- b) गामा फलन की परिभाषा दीजिए तथा उसके मूलभूत गुण लिखिए। सिद्ध कीजिए कि [10]

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n > 0$$

Define the Gamma function and state its fundamental properties. Prove that

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n > 0$$

- c) मान लीजिए कि $\mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^3$ एक रैखिक रूपान्तरण है जिसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है। [10]

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + 5y + 3z, x + 3y + 2z)$$

मानक आधार के साथ T का आव्यूह ज्ञात कीजिए। पंक्ति तथा स्तंभ अपचयन की सहायता से T की रैंक एवं नल्लिटी ज्ञात कीजिए।

Let $T : \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined by

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + 5y + 3z, x + 3y + 2z)$$

Find the matrix of T with respect to the standard basis. Using row and column operation find the rank and nullity of T.

3. a) निम्नलिखित अवकलन समीकरण को हल करें। [10]

Solve the following differential equation :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 5y = x^2 \sin(\log x)$$

- b) जैकोबियन $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ की परिभाषा दीजिए तथा फलनों की परस्पर निर्भरता जाँचने में इसकी भूमिका

समझाइए। जैकोबियन की सहायता से सिद्ध कीजिए कि

[15]

$$u = x + y + z, v = xy + yz + zx, w = xyz$$

फलन परस्पर निर्भर है।

Define the Jacobian

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$$

Explain its role in testing functional dependency. Show that the functions

$$u = x + y + z, v = xy + yz + zx, w = xyz$$

are functionally dependent by evaluating the Jacobian.





- c) किसी सदिश बिन्दु फलन का डायवर्जेंस परिभाषित कीजिए तथा उसका भौतिक महत्व स्पष्ट कीजिए।
सिद्ध कीजिए कि सदिश क्षेत्र [15]

$$\vec{F} = (yz)\hat{i} + (zx)\hat{j} + (xy)\hat{k} \text{ सोलिनॉयड है।}$$

Define divergence of a vector point function and explain its physical significance.
Show that the vector field

$$\vec{F} = (yz)\hat{i} + (zx)\hat{j} + (xy)\hat{k} \text{ is a solenoidal.}$$

4. a) यदि $\Delta f = (y^2 - 2xyz^3)\hat{i}$ [15]
 $+ (3 + 2xy - x^2z^3)\hat{j}$
 $+ (6z^3 - 3x^2yz^2)\hat{k}$

तो $f(x, y, z)$ ज्ञात कीजिए बशर्ते $f(1, 0, 1) = 8$

$$\text{If } \Delta f = (y^2 - 2xyz^3)\hat{i} \\ + (3 + 2xy - x^2z^3)\hat{j} \\ + (6z^3 - 3x^2yz^2)\hat{k}$$

Then find $f(x, y, z)$ provided $f(1, 0, 1) = 8$.

- b) समाकलन क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए। [10]

$$\int_0^1 \int_x^1 (x + y) dy dx$$

Evaluate

$$\int_0^1 \int_x^1 (x + y) dy dx$$

by changing the order of integration.





- c) निम्नलिखित द्विघात रूप को आर्थोगोनल रूपान्तरण द्वारा उनके कैनोनिकल रूप में बदलिए। [15]

$$Q = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

तथा इसकी रैंक, इंडेक्स एवं सिग्नेचर ज्ञात कीजिए।

Reduce the quadratic form

$$Q = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

to its canonical form by an orthogonal transformation and hence determine its rank, index and signature.

5. a) $\vec{A} = y^2\hat{i} + xy\hat{j} - xz\hat{k}$ के लिए स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित करें जहाँ S अर्द्धगोलाकार $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ है। [10]

Verify Stoke's theorem for $\vec{A} = y^2\hat{i} + xy\hat{j} - xz\hat{k}$, where S is the hemisphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

- b) सदिश सर्वसमिका सिद्ध कीजिए $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ उपर्युक्त सर्वसमिका को $\vec{F} = (xy)\hat{i} + (yz)\hat{j} + (zx)\hat{k}$ के लिए सत्यापित कीजिए। [15]

Prove the vector identity $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ verify the identity for $\vec{F} = (xy)\hat{i} + (yz)\hat{j} + (zx)\hat{k}$.

- c) त्रिविमीय ज्यामिति में सरल रेखा के सममित रूप का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा दिशा अनुपातों का महत्व स्पष्ट कीजिए। उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (2, -1, 3) से होकर जाती है तथा निम्नलिखित रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है। [15]

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3} \text{ तथा } \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Obtain the symmetric form of the equation of a straight line in three dimensional space and explain the significance of direction ratios. Find the equation of a straight line passes through the point (2, -1, 3) and intersect the lines.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3} \text{ and } \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$





6. a) लैग्रेंजियन विधि का उपयोग करके एक सरल लोलक की गति का समीकरण प्राप्त करें और इस प्रकार छोटे आयाम वाले दोलनों के लिए इसकी समय अवधि के लिए सूत्र निकालें। [10]

Obtain the equation of motion of a simple pendulum by using Lagrangian method and hence deduce the formula for its time period for a small amplitude oscillations.

- b) सामान्य कैटेनरी की परिभाषा दीजिए। गुरुत्वाकर्षण के अधीन समान क्षैतिज स्तर पर स्थित दो बिंदुओं के बीच लटकी हुई सामान्य कैटेनरी का समीकरण ज्ञात कीजिए। [15]

Define common catenary. Derive the equation of a common catenary suspended under gravity between two fixed points in the same horizontal line.

- c) ग्रहों की गति से संबंधित केपलर के तीनों नियम लिखिए। न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम का प्रयोग कर केपलर के तृतीय नियम को सिद्ध कीजिए। [15]

State Kepler's three laws of planetary motion using Newton's law of gravitation, prove Kepler's third law of planetary motion.

7. a) दिखाएँ कि एक सरल गतिकीय संरक्षी प्रणाली में गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का योग स्थिर होता है। [10]

Show that in a simple dynamical conservative system sum of kinetic energy and potential energy is constant.

- b) निम्नलिखित अंतरिक्ष वक्र के लिए [15]

$$\vec{r}(t) = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + bt \hat{k}$$

ज्ञात कीजिए वक्रता (curvature) तथा मरोड़ (torsion)

For the space curve given by

$$\vec{r}(t) = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + bt \hat{k}$$

Find the curvature and the torsion of the curve at any point.

- c) त्रिसमाकल की परिभाषा दीजिए तथा उसका ज्यामितिय अर्थ स्पष्ट कीजिए। त्रिसमाकल की सहायता से उस चतुष्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक समकलों तथा समतल $x + y + z = a$ से घिरा हुआ है। [15]

Define triple integral and explain its geometrical meaning. Using triple integration, find the volume of the tetrahedron bounded by the co-ordinate planes and the plane $x + y + z = a$.





SPACE FOR ROUGH WORK

