प्रयोग अभिकल्पनाओं $H_0 : \theta = \theta_0$ अथवा $H_1 : \theta = \theta_1 (> \theta_0)$ के परीक्षण के लिये अनुक्रमित प्रायिकता अनुपात परीक्षण दीजिये, जबकि प्रतिचयन निम्न प्रसामान्य घनत्व से है

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right] - \infty < x < \infty$$

जहाँ σ ज्ञात है। OC फलन तथा ASN फलन भी ज्ञात कीजिये।

10. *(a)* Derive the probability density function and moment generating function of *p*-variate normal distribution. 20

p-चर प्रसामान्य बंटन के प्रायिकता घनत्व फलन तथा आघूर्ण जनन फलन ज्ञात कीजिये।

(b) Obtain the characteristic function of a Wishart distribution and also describe its various properties. 20

विशार्ट बंटन का अभिलक्षण फलन प्राप्त कीजिये तथा इसके विभिन्न गुणधर्मों को भी समझाइये।

★★★

4CCSME

STATISTICS

सांख्यिकी

PAPER—I

प्रश्न-पत्र—I

Full Marks : 200 *Time* : 3 hours

पूर्णांक : 200 *समय* : 3 घण्टे

The figures in the margin indicate full marks

हाशिये में पूर्णांक दिए गए हैं

Candidates are required to answer **five** questions in which Question No. **1** is compulsory

परीक्षार्थियों को **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जिनमें प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है

1. Write on/Answer any *four* of the following : 10×4=40

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** पर लिखिये/के उत्तर दीजिये :

(a) Bayes' theorem

बेस प्रमेय

(b) Joint, marginal and conditional distributions

संयुक्त, सीमान्त और प्रतिबंध बंटन

(c) Maximum likelihood estimation method

महत्तम सम्भाविता आकलन विधि

(d) Cramer-Rao inequality

क्रैमर-राव असमता

(e) Explain central limit theorem.

सेंट्रल लिमिट प्रमेय को समझाइये।

(f) Define multiple and partial correlation coefficients.

बहु-सहसम्बन्ध और आंशिक सह-सम्बन्ध गुणांकों को परिभाषित कीजिये।

(g) Define Hotelling T^2 statistic.

होटेलिंग T^2 प्रतिदर्शज को परिभाषित कीजिये।

(h) Explain the method of analysis of variance.

प्रसरण-विश्लेषण की विधि को समझाइये।

2. (a) Give the definition of classical probability. State and prove additive theorem of probability for n events. What is the result if the events are mutually exclusive? 15

प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित परिभाषा दीजिये। n घटनाओं के लिए प्रायिकता के योगात्मकता प्रमेय को व्यक्त और सिद्ध कीजिये। यदि घटनायें परस्पर अपवर्जी हों, तो परिणाम क्या होगा?

समाश्रयण विश्लेषण से आप क्या समझते हैं? निम्न दो समाश्रयण रेखाओं के लिये

$$8x - 11y + 66 = 0$$
$$40x - 18y - 214 = 0$$

ज्ञात कीजिये—

(i) x और y के माध्य;

(ii) सहसम्बन्ध गुणांक;

(iii) $x = 9$ के लिये y का सर्वोत्तम मान।

9. (a) Differentiate between parametric and non-parametric tests. State the assumption of non-parametric test. Name a test which is both parametric as well as non-parametric. Explain median test. 20

प्राचलिक एवं अप्राचलिक परीक्षणों में अन्तर कीजिए। अप्राचलिक परीक्षणों में गृहित परिकल्पनाओं को व्यक्त कीजिये। एक परीक्षण का नाम दीजिये, जो प्राचल एवं अप्राचल दोनों ही हैं। मध्यिका परीक्षण की व्याख्या कीजिए।

(b) Give the sequential probability ratio test for testing $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 : \theta = \theta_1 (> \theta_0)$ in sampling from normal density

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2 \right] \quad -\infty < x < \infty$$

where σ is known. Also, obtain its OC function and ASN function. 20

(b) When the values of x are equidistant, explain how change of origin helps in estimating the constants of equation of first degree. 20

जब x के मूल्य समान दूरी पर हों, तो समझाइये कि उद्गम का बदलाव किस प्रकार एकघाती समीकरण स्थिरांकों का आकलन करने में मदद करता है।

8. (a) What does correlation coefficient measure? Show that zero correlation coefficient does not mean that variables are independent. Explain what zero correlation mean then. 20

सहसम्बन्ध गुणांक क्या मापता है? दर्शाइये कि शून्य सहसम्बन्ध गुणांक का तात्पर्य यह नहीं है कि चर स्वतंत्र है। तब समझाइये कि शून्य सहसम्बन्ध गुणांक का क्या तात्पर्य है।

(b) What do you mean by regression analysis? For the following two lines of regression

$$8x - 11y + 66 = 0$$
$$40x - 18y - 214 = 0$$

find the—

(i) mean values of x and y;

(ii) correlation coefficient;

(iii) best value of y for $x = 9$. 20

(b) Define random variable and probability density function. If

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x}, & \text{if } x \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

find the value of k, so that $f(x)$ is a p.d.f. 15

यादृच्छिक चर व प्रायिकता घनत्व को परिभाषित कीजिये। यदि

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x}, & \text{यदि } x \geq 0 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

हो, तो k का मान ज्ञात कीजिये, ताकि $f(x)$ एक प्रायिकता घनत्व फलन हो।

(c) State Chebyshev's inequality. A symmetric die is thrown 600 times. Find the lower limit found for the probability of getting 80 to 120 sixes. 10

चेबीशेव असमयिका को व्यक्त कीजिये। एक सममित पाँसा 600 बार उछाला जाता है। 80 और 120 बार संख्या छः आने की प्रायिकता की निचली सीमा ज्ञात कीजिये।

3. (a) Define conditional expectation and covariance. If X and Y are independent random variables, then prove that—

(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$;

(ii) $\text{var}(aX + bY) = a^2\,\text{var}(X) + b^2\,\text{var}(Y)$. 15

प्रतिबंधित प्रत्याशा और सह-विसरण को परिभाषित कीजिये। यदि X और Y स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं, तो सिद्ध कीजिये—

(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$;

(ii) $\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{ var}(X) + b^2 \text{ var}(Y)$.

(b) The first three moments of a distribution about the value 2 of the variable are 1, 16 and –40. Show that the $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 15$ and $\mu_3 = -86$. Also show that the first three moments about the origin are 3, 24 and 76. 15

किसी बंटन के मूल्य 2 से लिये गये प्रथम तीन आघूर्ण क्रमशः 1, 16 और –40 हैं। सिद्ध कीजिये कि $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 15$ और $\mu_3 = -86$ हैं। यह भी सिद्ध कीजिये कि मूलबिन्दु से लिये गये प्रथम तीन आघूर्ण क्रमशः 3, 24 और 76 हैं।

(c) Prove that the correlation coefficient is the geometric mean of the regression coefficients. 10

सिद्ध कीजिये कि सहसम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है।

6. *(a)* State and prove Neyman-Pearson lemma. Obtain the most powerful test for testing $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 : \theta = \theta_1 (> \theta_0)$, based on a random sample of size n, from a population with density function $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \ge 0$. 20

नेमन-पियर्सन लेमा लिखिये और उसे सिद्ध कीजिये। यदि एक ऐसे समष्टि से जिसका घनत्व फलन निम्नांकित हो

$$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, \ x \ge 0$$

n साइज का यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया हो, तो परिकल्पना $H_1 : \theta = \theta_1 (> \theta_0)$ के सापेक्ष $H_0 : \theta = \theta_0$ के परीक्षण के लिये सख्ततम परीक्षण ज्ञात कीजिये।

(b) State the various applications of χ^2-test, stating clearly the hypothesis tested and assumptions made. 20

χ^2-परीक्षण के विभिन्न अनुप्रयोग बताइये। यह स्पष्ट रूप से बताइये कि कौन-सी परिकल्पना की जाँच की जाती है और उसके लिये क्या-क्या संकल्पनायें की जाती हैं।

7. *(a)* What is the principle of least squares? Explain its use in obtaining an equation of second-degree parabola. 20

न्यूनतम वर्ग का सिद्धान्त क्या है? द्विघाती परवलय का समीकरण ज्ञात करने में इसके उपयोग को समझाइये।

4. *(a)* Define the characteristic function of a random variable. Show that the characteristic function of the sum of two independent variables is equal to the product of their characteristic functions. 15

एक यादृच्छिक चर के अभिलक्षण फलन की परिभाषा दीजिये। सिद्ध कीजिये कि दो स्वतंत्र चरों के योग का अभिलक्षण फलन उनके अभिलक्षण फलनों के गुणा के बराबर होता है।

(b) What are moments? Explain the procedure of calculating the first four moments about the mean. 15

परिघात किसे कहते हैं? माध्य से प्रथम चार परिघातों के परिगठन की विधि स्पष्ट कीजिये।

(c) Define a Poisson variate. Give its two examples. Derive p.m.f. of Poisson distribution. 10

प्वासों चर की परिभाषा दीजिये। इसके दो उदाहरण दीजिये। प्वासों बंटन की प्रायिकता द्रव्यमान फलन ज्ञात कीजिये।

5. *(a)* Explain the concepts of consistency, efficiency and sufficiency of estimators, giving suitable examples. 15

आकलकों के सामंजस्यता, दक्षता एवं पर्याप्ति की संकल्पनाओं पर उचित उदाहरणों द्वारा प्रकाश डालिये।

(b) If $x_1, x_2, \cdots, x_n$ denotes a random sample from a population with probability function

$$f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x};\ x=0,1$$

and if $T=x_1+x_2+\cdots+x_n$, then show that

$$\frac{T(T-1)}{n(n-1)}$$

is an unbiased estimator of θ^2. 15

एक ऐसे समष्टि से जिसका प्रायिकता फलन निम्नांकित है

$$f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x};\ x=0,1$$

यदि एक यादृच्छिक प्रतिदर्श $x_1, x_2, \cdots, x_n$ लिया गया हो और $T=x_1+x_2+\cdots+x_n$ हो, तो सिद्ध कीजिये कि θ^2 का एक अनभिनत आकलक

$$\frac{T(T-1)}{n(n-1)}$$

होगा।

(c) What do you understand by interval estimation? Give its description stating its relationship with testing of hypothesis. 10

अन्तराल आकलन से आप क्या समझते हैं? परिकल्पना परीक्षण से सम्बन्ध बतलाते हुये इसका वर्णन कीजिये।