Total No. of Printed Pages—19

MATHEMATICS

गणित

PAPER—II

प्रश्न-पत्र—II

Full Marks : 200	*Time* : 3 hours
पूर्णांक : 200	*समय* : 3 घण्टे

The figures in the margin indicate full marks

हाशिये में पूर्णांक दिए गए हैं

Candidates are required to answer **five** questions, selecting at least **one** from each Section

परीक्षार्थियों को प्रत्येक भाग से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनते हुए कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं

SECTION—A

भाग—क

1. *(a)* Prove that the set z of integers is an infinite Abelian group for the binary composition $*$ defined by $a * b = a + b + 1$. 12½

सिद्ध करें कि पूर्णांक का समुच्चय z, बाइनरी कम्पोजिसन $*$, $a * b = a + b + 1$ के सापेक्ष एक अनन्त अबेलियन ग्रुप है।

(b) Prove that if H be a subgroup of a finite group G, then the order of G is a multiple of the order of H. 15

यदि H एक सीमित ग्रुप G का सबग्रुप है, तो सिद्ध करें कि G का ऑर्डर, H के ऑर्डर का गुणांक है।

(c) A subgroup H of a group G is normal subgroup of G iff product of two right cosets of H in G is again a right coset of H in G. Prove it. 12½

किसी ग्रुप G का एक सबग्रुप H, G का नॉर्मल सबग्रुप है, यदि और केवल यदि, G में H के दो दाहिने कोसेट का गुणनफल G में H का दाहिना कोसेट है। सिद्ध करें।

2. (a) Prove that a ring R is without divisor of zero if and only if the cancellation laws for multiplication holds in R. 10

सिद्ध करें कि कोई रिंग R में शून्य के भाजक नहीं होंगे, यदि और केवल यदि, रिंग R में कैंसिलेशन लॉ सत्य होता है।

(b) If p is prime and m, a +ve integer such that p^m divides $O(G)$, then prove that there exists a subgroup H of G such that $O(H) = p^m$. 10

यदि p एक रूढ़ संख्या है और m एक धनात्मक पूर्णांक इस तरह है कि p^m, $O(G)$ को विभाजित करता है, तो सिद्ध करें कि G का एक सबग्रुप H ऐसा मिलेगा कि $O(H) = p^m$.

(c) Show that dual of a lattice is a lattice. 10

सिद्ध करें कि किसी लैटिस का डूअल भी लैटिस है।

(d) If L is a distributive lattice and if b' be the complement of an element b in L and $a \wedge b' = 0$, then show that $a \leq b$. 10

यदि L एक डिस्ट्रीब्यूटिव लैटिस और b' एलिमेंट b का कॉम्प्लिमेन्ट L में है, और $a \wedge b' = 0$ है, तो दिखाएँ कि $a \leq b$.

★★★

(d) Prove that the connected graph G has a Hamiltonian circuit if for any two vertices u and v which are not adjacent, $\deg(u)+\deg(v) \geq n$, where n is the number of vertices. 10

सिद्ध करें कि कनेक्टेड ग्राफ G का हैमील्टोनियन सर्किट होगा, यदि वैसे दो वर्टिसेस u और v जो अगल-बगल न हों, के लिये $\deg(u)+\deg(v) \geq n$, जहाँ n वर्टिसेस की संख्या है।

16. (a) If p and q are two statements, then show that $p \oplus q$ is equivalent to $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$. 10

यदि p और q दो कथन हैं, तो सिद्ध करें कि $p \oplus q$, $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ के समतुल्य है।

(b) In a certain town, all cars marked P belong to the police. The cars are not fitted with the wireless unless they are marked P. The police has no blue cars. Prove by using the Boolean algebra that no blue cars are fitted with the wireless. 10

किसी शहर में ऐसे सभी कार जिनमें P का चिह्न है पुलिस के हैं। वैसे कार जिनमें P का चिह्न नहीं है वायरलेस से युक्त नहीं हैं। पुलिस के पास कोई नीली कार नहीं है। बुलियन एलजेब्रा की सहायता से सिद्ध करें कि किसी भी नीली कार में वायरलेस नहीं है।

(c) Prove that every Euclidean domain is a principal ideal domain but the converse is not necessarily true. 10

सिद्ध करें कि प्रत्येक युक्लीडियन डोमेन एक प्रिंसिपल आइडियल डोमेन है किन्तु इसका विपरीत सत्य नहीं है।

(d) If K is a finite extension of a finite field F and L is a finite field extension of K, then prove that—

(i) L is a finite field extension of F;

(ii) $[L:F]=[L:K][K:F]$. 10

यदि K, फाइनाइट फील्ड F का फाइनाइट एक्सटेंशन है और L, K का फाइनाइट एक्सटेंशन है, तो सिद्ध करें कि—

(i) L, F का एक फाइनाइट फील्ड एक्सटेंशन होगा;

(ii) $[L:F]=[L:K][K:F]$.

3. (a) Show that the function $f(z)=e^{-z^{-4}}$ $(z \neq 0)$ and $f(0)=0$ is not analytic at $z=0$ although the Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point. 12½

दिखाएँ कि

$$f(z)=e^{-z^{-4}} \quad (z \neq 0)$$
$$f(0)=0$$

$z=0$ पर एनालीटिक नहीं है, हालाँकि $z=0$ पर कोशी-रीमान समीकरण संतुष्ट होता है।

(b) If $f(z)$ is a analytic within and on a closed contour C and if z_0 is any point within C, then prove that

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

the integration around C being taken in positive sense. 12½

यदि $f(z)$ किसी बन्द कॉन्टूर C पर या उसके अन्दर एनालीटिक है और z_0, C के अन्दर एक बिन्दु है, तो सिद्ध करें कि

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

(c) If $w = \tan^2 \frac{z}{2}$, then show that the strip in the z-plane between $x = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$ is mapped onto the interior of the unit circle in w-plane, cut along the real axis from $w = -1$ to $w = 0$. 15

यदि $w = \tan^2 \frac{z}{2}$, तो दिखाएँ कि z-प्लेन में $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ के बीच की पट्टी w-प्लेन के इकाई वृत्त की भीतरी क्षेत्र जिसमें $w = -1$ से $w = 0$ तक वास्तविक अक्ष शामिल हैं, में मैप करता है।

4. (a) If z_1 is a point inside the circle of convergence $|z - z_0| = R$ of a power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, then prove that the series is uniformly convergent in the closed disk $|z - z_0| \le R_1$, where $R_1 = |z_1 - z_0|$. 12½

यदि वोर्टेक्स केन्द्र बेलन के अन्दर है, तो यह स्थिर होगा यदि इनमें से किसी एक की दूरी केन्द्र से $(\sqrt{5} - 2)^{1/2} a$ होगी, जबकि a बेलन की त्रिज्या है।

(c) Derive Navier-Stokes equation for viscous incompressible fluid. 15

विसकस इनकॉम्प्रेसिबल द्रव के लिए नेवियर-स्टोक्स समीकरण निकालें।

15. (a) Prove that a simple graph with n vertices and k components cannot have more than $\frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ edges. 10

सिद्ध करें कि किसी सिम्पल ग्राफ जिसका n वर्टिसेस हैं तथा k कॉम्पोनेन्ट्स हैं के $\frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ से अधिक एजेस नहीं हो सकते हैं।

(b) Show that the maximum number of edges in a complete bipartite graph with n vertices are $\frac{n^2}{4}$. 10

दिखाएँ कि किसी कॉम्प्लिट बाइपारटाइट ग्राफ़ जिसमें n वर्टिसेस हैं एजेस कि अधिकतम संख्या $\frac{n^2}{4}$ होगी।

(c) Prove that an indirected graph G is Eulerian if and only if it is connected and each vertex has even degree. 10

सिद्ध करें कि एक इनडाईरेक्टेड ग्राफ G यूलेरियन होगा, यदि और केवल यदि, यह कनेक्टेड हो और प्रत्येक वर्टेक्स का डिग्री सम हो।

एक वृत्ताकार बेलन जिसका जड़त्व-केन्द्र उसके अक्ष से c दूरी पर है, एक क्षैतिज तल पर घुनता है। यदि यह अस्थायी संतुलन की स्थिति से गतिमान होता है, तो दिखाएँ कि जबकि जड़त्व-केन्द्र निम्नतन स्थिति में है, तो तल का नॉर्मल रीएक्शन इसके भार का $\left[1+\frac{4c^2}{(a-c)^2+k^2}\right]$ गुना है, जहाँ k बेलन के सेन्टर ऑफ मास से गुज़रते हुए अक्ष के परितः रेडियस ऑफ जायरेशन है।

14. *(a)* Show that the velocity field

$$u(x, y) = \frac{A(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v(x, y) = \frac{2Axy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad w = 0$$

satisfies the equation of motion for inviscid incompressible flow. Determine the pressure associated with this velocity field. 12½

दिखाएँ कि वेलोसिटी फील्ड

$$u(x, y) = \frac{A(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v(x, y) = \frac{2Axy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad w = 0$$

किसी इनुविसिड इनकॉम्प्रेसिबल द्रव की गति के समीकरण को संतुष्ट करता है। इस वेलोसिटी फील्ड से सम्बन्धित दबाव को ज्ञात करें।

(b) If a vortex pair is situated within a cylinder, show that it will remain at rest if the distance of either from the centre is given by $(\sqrt{5}-2)^{1/2}a$, where a is the radius of the cylinder. 12½

पावर सिरीज़ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ के केन्द्राभिमुख वृत्त $|z - z_0| = R$ के अन्दर z_1 एक बिन्दु है, तो सिद्ध करें कि यह पावर सिरीज़ क्लोज्ड डिस्क $|z - z_0| \le R_1$, जहाँ $R_1 = |z_1 - z_0|$, के यूनिफॉर्मली केन्द्राभिमुख होगा।

(b) State whether the following functions have isolated singularity or not : 12½

बताएँ कि निम्न फलनों के आइसोलेटेड सिंगुलैरिटी हैं अथवा नहीं :

(i) $f(z) = \log z$

(ii) $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$

(c) Find the general bilinear transformation which transforms the unit circle $|z| \le 1$ in the z-plane onto the unit circle $|w| \le 1$ in the w-plane. 15

उस व्यापक बाइलीनियर ट्रान्सफॉर्मेशन को ज्ञात करें जो कि z-प्लेन के इकाई वृत्त $|z| \le 1$ की w-प्लेन के वृत्त $|w| \le 1$ में मैप करे।

5. *(a)* Use simplex method to solve the linear programming problem : 12½

Maximize $\quad Z = 5x_1 + 3x_2$

subject to constraints

$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

सिम्प्लेक्स रीति का प्रयोग करते हुए निम्न रैखिक प्रक्रमन समस्या का हल ज्ञात कीजिए :

अधिकतम करें $Z = 5x_1 + 3x_2$

प्रतिबन्धों के साथ

$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(b) Solve the following LP problem graphically : 12½

Maximize $Z = 8000x_1 + 7000x_2$

subject to constraints

$$3x_1 + x_2 \le 66$$
$$x_1 + x_2 \le 45$$
$$x_1 \le 20$$
$$x_2 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

निम्नलिखित LP प्रब्लेम को ग्राफिकली हल करें :

अधिकतम करें $Z = 8000x_1 + 7000x_2$

प्रतिबन्धों के साथ

$$3x_1 + x_2 \le 66$$
$$x_1 + x_2 \le 45$$
$$x_1 \le 20$$
$$x_2 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

किसी दूर शहर में कार से जाने का औसत समय c घण्टा है जबकि बस से जाने में औसत समय b घण्टा है। एक व्यक्ति यह निश्चय नहीं कर पा रहा है कि कार से जाए या बस से जाए। इसलिए वह एक सिक्का को उछालकर निर्णय लेता है। उसका आनुमानिक यात्रा-समय क्या होगा?

13. (a) Deduce the principle of energy from Lagrange's equations. 12½

लैगग्रांजे के समीकरण से ऊर्जा के सिद्धान्त को प्रतिपादित करें।

(b) A particle of mass m moves in a force field of potential V. Write Hamilton's equations in spherical polar coordinates. 12½

एक बलक्षेत्र जिसका पोटेंशियल V है, में m मात्रा का एक वस्तु गति में है। स्फेरिकल पोलर नियामक में हैमिल्टोनियन समीकरण लिखें।

(c) A circular cylinder, whose centre of inertia is at a distance c from axis, rolls on a horizontal plane. If it be just started from a position of unstable equilibrium, show that the normal reaction of the plane when the centre of mass is in its lowest position is $\left[1 + \frac{4c^2}{(a-c)^2 + k^2}\right]$ times its weight, where k is the radius of gyration about an axis through the centre of mass. 15

12. *(a)* Find the probability that a single toss of a die results in a number less than 4, if *(i)* no other information is given and, *(ii)* it is given that the toss resulted in an odd number. 12½

किसी डाई के एक उछाल में 4 से कम अंक आने की प्रॉबेबिलिटी क्या होगी, यदि *(i)* कोई अन्य सूचना नहीं है, *(ii)* यह दिया हुआ है कि जो अंक आया वह एक विषम संख्या है।

(b) The probability density function of a random variable X is given by

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0<x<2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

Find the variance of the random variable X. 12½

किसी यादृच्छिक चर X का प्रॉबेबिलिटी डेन्सिटी फंक्शन निम्न है :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0<x<2\\ 0, & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

यादृच्छिक चर X का वेरिएन्स ज्ञात करें।

(c) The average travel time to a distant city is c hours by car or b hours by bus. A man cannot decide whether to drive or take the bus, so he tosses a coin. What is his expected travel time? 15

(c) Use duality to solve the following : 15

Minimize $Z = 3x_1 + x_2$

subject to constraints

$$x_1 + x_2 \ge 1$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 > 0$$

द्वैधता सिद्धान्त का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित रैखिक प्रक्रमन समस्या को हल करें :

न्यूनतम करें $Z = 3x_1 + x_2$

प्रतिबन्धों के साथ

$$x_1 + x_2 \ge 1$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 > 0$$

6. *(a)* A departmental head has 4 subordinates and 4 tasks to be performed. The subordinates differ in efficiency and the tasks differ in their intrinsic difficulty. His estimates of the times each man would take to perform each task is given in the effective matrix below. How should the tasks be allocated one to a man so as to minimise the total man-hour? 15

Subordinates

Tasks	*I*	*II*	*III*	*IV*
A	8	26	17	11
B	13	28	4	26
C	38	19	18	15
D	19	26	24	10

किसी विभागाध्यक्ष के अधीन 4 सहायक हैं जिन्हें 4 कार्य करने हैं। सहायकों की भिन्न-भिन्न कार्य करने की क्षमता भिन्न-भिन्न हैं। कार्यों की प्रकृति भी भिन्न-भिन्न हैं। प्रत्येक सहायकों के भिन्न-भिन्न कार्य करने की अवधि निम्न एफेक्टिव आव्यूह द्वारा प्रदर्शित है। इन कार्यों को सहायकों के बीच किस तरह से वितरित किया जाए कि कार्य पूरा करने में न्यूनतम मानव-घंटे लगे?

काम \ सहायक	I	II	III	IV
A	8	26	17	11
B	13	28	4	26
C	38	19	18	15
D	19	26	24	10

(b) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem : 15

Warehouse → Factory ↓	W_1	W_2	W_3	W_4	Factory capacity
F_1	19	30	50	10	7
F_2	70	30	40	60	9
F_3	40	8	70	20	18
Warehouse requirement	5	8	7	14	34

निम्नलिखित यातायात समस्या के इनीशियल बेसिक फीसिबल सल्यूशन को ज्ञात करें :

गोदाम → फैक्ट्री ↓	W_1	W_2	W_3	W_4	फैक्ट्री क्षमता
F_1	19	30	50	10	7
F_2	70	30	40	60	9
F_3	40	8	70	20	18
गोदाम माँग	5	8	7	14	34

(i) Find the value of the constant c.

(ii) Find $P(X \geq 3,\ Y \leq 2)$. 12½

दो सतत यादृच्छिक चर X एवं Y का संयुक्त प्रॉबेबिलिटी डेन्सिटी फंक्शन निम्न है :

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < 4,\ 1 < y < 5 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(i) स्थिरांक c का मान ज्ञात करें।

(ii) $P(X \geq 3,\ Y \leq 2)$ ज्ञात करें।

(c) Ten percent of the tools produced in a certain manufacturing process turn out to be defective. Find the probability that in a sample of 10 tools chosen at random exactly two will be defective by using—

(i) the binomial distribution;

(ii) the Poisson approximation of the binomial distribution. 15

किसी औज़ार निर्माण के क्रम में यह देखा जाता है कि 10 प्रतिशत औज़ार दोषयुक्त है। 10 औज़ार के यादृच्छिक चुनाव में मात्र दो के दोषयुक्त होने की प्रॉबेबिलिटी क्या होगी, यदि—

(i) बाइनोमियल डिस्ट्रिब्यूशन लें तो;

(ii) बाइनोमियल डिस्ट्रीब्यूशन का पॉयसन एप्रॉक्सिमेशन लें तो।

(b) Find the necessary and sufficient conditions for integrability of single differential equation $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. 12½

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$ के समाकलन हेतु नेसेसरी तथा सफिशियेंट शर्त को ज्ञात करें।

(c) Using the method of separating variables, solve

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \text{ where } t > 0,\ 0 \le x \le 1$$ 15

सेपरेटिंग वेरिएबल मेथड से हल करें

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \text{ जहाँ } t > 0,\ 0 \le x \le 1$$

11. (a) A ball is drawn at random from a box containing 6 red balls, 4 white balls and 5 blue balls. Determine the probability that it is (i) red, (ii) white, (iii) not red. 12½

एक बक्स से, जिसमें 6 लाल, 4 सफेद तथा 5 नीले गेंद हैं, एक गेंद यादृच्छिक निकाला जाता है। इसके (i) लाल होने की, (ii) सफेद होने की, (iii) लाल न होने की प्रॉबेबिलिटी ज्ञात करें।

(b) The joint probability density function of two continuous random variables X and Y is

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < 4,\ 1 < y < 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(c) For Poisson arrivals with mean arrival rate λ and exponential service time with mean rate μ, prove that

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \text{ where } n \ge 0$$ 10

पॉयसन एराइभल जिसका एराइभल दर का माध्य λ एवं एक्सपोनेन्शियल सर्विस समय दर का माध्य μ हो, तो सिद्ध करें कि

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \text{ जब } n \ge 0$$

7. (a) Prove that half-life or period of the population decreases as the excess of death rate over birthrate increases. 12½

सिद्ध करें कि जनसंख्या की अर्द्ध-जीवन या अवधि कम होती जाती है, यदि मृत्युदर, जन्मदर से बढ़ती जाती है।

(b) State and prove age-structured population model. 12½

एज-स्ट्रक्चर्ड पॉपूलेशन मॉडल का कथन दें और सिद्ध करें।

(c) Derive a thematical model for diabetes mellitus by ordinary differential equations. 15

ऑर्डिनरी डिफरेन्शियल इक्वेशन की सहायता से डायबीटीज मेलिटस का सैद्धान्तिक मॉडल निकालें।

8. *(a)* Discuss the stability of the equilibrium positions (0, 0) and $(p/q, a/b)$ for the prey-predator models. 12½

प्रे-प्रीडेटर मॉडेल के (0, 0) एवं $(p/q, a/b)$ पर संतुलन के स्थायित्व की विवेचना करें।

(b) Find out the number of susceptibles $S(t)$ and infected persons $I(t)$ by simple epidemic model. 12½

सामान्य एपिडेमिक मॉडेल से ग्राह्यता की संख्या $S(t)$ तथा संक्रमित व्यक्तियों की संख्या $I(t)$ को ज्ञात करें।

(c) If $N(t)$ be the number of companies which have adopted a technological innovation till time t and R is the total number of companies in the region, then find the relation between N and R. 15

यदि किसी क्षेत्र में कुल कम्पनियों की संख्या R है जिनमें $N(t)$ वैसी कम्पनियों की संख्या है जिन्होंने t समय तक तकनीकी खोज का अंगीकार किया है, तो N एवं R में सम्बन्ध ज्ञात करें।

SECTION—B

भाग—ख

9. *(a)* Find the differential equation of all surfaces of revolution having z-axis as the axis of rotation. 10

सर्फेस ऑफ रेवोल्यूशन जिसका एक्सिस ऑफ रोटेशन z-एक्सिस है, का डिफरेन्शियल इक्वेशन ज्ञात करें।

(b) Solve :

$$\left(\frac{y^2 z}{x}\right) p + xzq = y^2$$

where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. 10

हल करें :

$$\left(\frac{y^2 z}{x}\right) p + xzq = y^2$$

जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ और $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

(c) Solve : 10

हल करें :

$$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = z(x^2 - y^2)$$

(d) Use Charpit's method to find the complete integral of $px + qy = pq$. 10

चारपिट के मेथड से निम्न का कम्प्लिट इन्टिग्रल निकालें :

$$px + qy = pq$$

10. *(a)* Find the orthogonal trajectories of the system of circles touching a given straight line at a given point. 12½

दिए हुए वृत्त समूह जोकि किसी संरल रेखा को एक बिन्दु पर स्पर्श करते हैं, का लम्बात्मक वक्र ज्ञात करें।