गौस के अपसरण प्रमेय की व्याख्या करें और इसको फलन

$$\vec{F} = x^3\vec{i} + x^2y\vec{j} + x^2z\vec{k}$$

के लिए सत्यपित करें जो बेलनी क्षेत्र $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ और $z = b$ से घिरा है।

(b) (i) Show that the vector

$$\vec{V} = (\sin y + z)\vec{i} + (x\cos y - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$$

is irrotational. 10

प्रदर्शित करें कि सदिश

$$\vec{V} = (\sin y + z)\vec{i} + (x\cos y - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$$

अघूर्णीय है।

(ii) Prove that

$$\text{div}\,(\text{grad}\, r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

where $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. 10

सिद्ध करें कि

$$\text{div}\,(\text{grad}\, r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

जहाँ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(c) For the curve $x = a(3u - u^3)$, $y = 3au^2$, $z = a(3u + u^3)$, show that k and τ both are equal. 10

वक्र $x = a(3u - u^3)$, $y = 3au^2$, $z = a(3u + u^3)$ के लिए सिद्ध करें कि k और τ दोनों समान होते हैं।

★ ★ ★

Total No. of Printed Pages—12

4CCSME

MATHEMATICS

गणित

PAPER—I

प्रश्न-पत्र—I

Full Marks : 200 *Time* : 3 hours

पूर्णांक : 200 समय : 3 घण्टे

The figures in the margin indicate full marks

हाशिये में पूर्णांक दिए गए हैं

Candidates are required to answer **five** questions in which Question No. **1** is compulsory

परीक्षार्थियों को **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जिसमें प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है

1. Answer any *five* of the following questions : $8\times5=40$

निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दें :

(a) If λ is non-zero eigenvalue of an invertible matrix A, then prove that λ^{-1} (det A) is an eigenvalue of adj A.

यदि λ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह A का ऐसा अभिलक्षणिक मान है जो शून्य नहीं है, तो सिद्ध करें कि λ^{-1} (सारणिक A), A के सहखंडज आव्यूह (adj A) का एक अभिलक्षणिक मान है।

(b) Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ is diagonalizable and find a matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

दिखाएँ कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ विकर्णीय है तथा एक ऐसा आव्यूह P ज्ञात करें, जिससे $P^{-1}AP$ एक विकर्ण आव्यूह हो।

(c) Evaluate :

मान प्राप्त करें :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(d) Determine the point where the function $f(x, y) = x^3 y^3 - 3axy$ has a maximum or a minimum value.

उन बिन्दुओं को निर्धारित करें, जहाँ पर फलन $f(x, y) = x^3 y^3 - 3axy$ अधिकतम या न्यूनतम हो।

(e) Show that curl grad $\phi = 0$.

दिखाएँ कि curl grad $\phi = 0$.

(f) Find the equation of the tangent planes to the hyperboloid $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which passes through the straight line $x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$.

(c) Show that the vector field defined by the vector function

$$\vec{V} = xyz\,(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$$

is conservative. 10

दिखाएँ कि सदिश फलन

$$\vec{V} = xyz\,(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$$

द्वारा परिभाषित सदिश क्षेत्र संरक्षी होता है।

(d) Find the work done in moving the particle once round the ellipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \; z = 0$$

under the field of force given by

$$\vec{F} = (2x - y + z)\vec{i} + (x + y - z^2)\vec{j} + (3x - 2y + 4z)\vec{k}$$

10

$$\vec{F} = (2x - y + z)\vec{i} + (x + y - z^2)\vec{j} + (3x - 2y + 4z)\vec{k}$$

द्वारा प्रदत्त बल-क्षेत्र के अधीन दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 0$ के चारों ओर कण के एक बार घूमने में किए गए कार्य को मालूम करें।

10. (a) State Gauss divergence theorem and verify it for the function

$$\vec{F} = x^3\vec{i} + x^2y\vec{j} + x^2z\vec{k}$$

over the cylindrical region bounded by

$$x^2 + y^2 = a^2, \; z = 0 \text{ and } z = b$$ 10

(c) A lamina is totally immersed in fluid and is quadrant of a circle of radius a of which the centre is in the surface. Determine the locus of the centre of pressure in the lamina and find the length of the curve. 20

वृत्त के एक चतुर्थांश के आकार का पटल पूर्ण रूप से तरल में डूबा है। वृत्त का अर्द्धव्यास a तथा इसका केन्द्र, द्रव की सतह में है। पटल में दाब केन्द्र का बिन्दुपथ निकालें तथा वक्र की लम्बाई बताएँ।

9. (a) If a length s is divided into n equal parts such that at the end of each of these lengths acceleration of a moving particle is increased by f/n, find the velocity of the particle after describing the distance s, given that the particle started moving with acceleration f from rest. 10

लम्बाई s को n बराबर भागों में इस प्रकार समविभाजित किया जाता है कि प्रत्येक भाग के अंत में गतिमान कण की वेग-वृद्धि f/n बढ़ जाती है। s दूरी चलने के बाद कण का वेग ज्ञात करें, जबकि गतिमान कण की प्रारम्भिक वेग शून्य तथा वेग-वृद्धि f है।

(b) Deduce $y = c\cosh\frac{x}{c}$ for a common catenary. 10

एक साधारण रज्जुवक्र के लिए निकालें

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

उन स्पर्शी समतलों के समीकरण ज्ञात करें जो अतिपरवलयज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ को स्पर्श करते हैं और जो सीधी रेखा

$$x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$$

से होकर जाते हैं।

(g) An ellipse is just immersed in water with its major axis vertical. Show that if the centre of pressure coincides with the focus, the eccentricity of the ellipse must be $\frac{1}{4}$.

एक दीर्घवृत्त ठीक पानी में डूबा हुआ है जिसका दीर्घाक्ष ऊर्ध्वाधर है। यदि दाब-केन्द्र नाभि के संपाती हो, तो सिद्ध करें की दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{1}{4}$ है।

(h) Evaluate :

मान निकालें :

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2 - xy)\, dx\, dy$$

2. (a) Find the eigenvalues of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ and verify Cayley-Hamilton theorem for this matrix. Find the inverse of the matrix A and also express

$$A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10I$$

as a linear polynomial in A. 10

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के अभिलक्षणिक मूल को ज्ञात करें और कैले-हैमिल्टन प्रमेय को इस आव्यूह के लिए प्रमाणित करें। आव्यूह A का व्युत्क्रमणीय आव्यूह ज्ञात करें तथा $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10I$ को A के एकघाती बहुपद के रूप में व्यक्त करें।

(b) Write the matrix A of the quadratic form

$$6x^2 + 65y^2 + 11z^2 + 4zx$$

Find the eigenvalues of A and prove also that the above quadratic form is positive definite. 10

द्विघाती रूप $6x^2 + 65y^2 + 11z^2 + 4zx$ के आव्यूह A को लिखें। A के अभिलक्षणिक मूल को ज्ञात करें तथा यह भी सिद्ध करें कि उपर्युक्त द्विघाती रूप निश्चित धनात्मक है।

(c) If x, y, z are vectors in a vector space $V(F)$ such that $x + y + z = 0$, prove that x and y span the same subspace as y and z. 10

यदि x, y, z सदिश समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं इस प्रकार कि $x + y + z = 0$, तो सिद्ध करें कि x और y, y और z के जैसा ही उपसमष्टि स्पैन करते हैं।

(d) If U and W are subspaces of a finite-dimensional vector space $V(F)$, then show that

यदि U और W एक निश्चित विमा वाले सदिश समष्टि $V(F)$ के उपसमष्टि हों, तो दिखाएँ कि

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$$

10

(b) Solve : 10

हल करें :

$$(3x + 2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5(3x + 2)\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 + x + 1$$

(c) Find the directional derivative of the function $f = xy^2 + yz^2 + zx^2$ along the tangent to the curve $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ at (1, 1, 1). 10

फलन $f = xy^2 + yz^2 + zx^2$ का वक्र $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ के स्पर्श-रेखा के साथ-साथ (1, 1, 1) पर दिक्-अवकलज ज्ञात करें।

8. (a) A particle moves with a central acceleration $\mu (r^5 - 9r)$, being projected from an apse at a distance $\sqrt{3}$ with velocity $3\sqrt{(2\mu)}$. Show that its path is the curve $x^4 + y^4 = 9$. 10

दूरी $\sqrt{3}$ पर एक स्तब्धिका से वेग $3\sqrt{(2\mu)}$ के साथ प्रक्षेपित किए जाने पर एक कण केन्द्रीय त्वरण $\mu (r^5 - 9r)$ के साथ चलता है। दिखाएँ कि इसका पथ वक्र $x^4 + y^4 = 9$ है।

(b) Discuss the principle of virtual work for a system of coplanar forces. 10

समतली बलों के निकाय के लिए कल्पित कार्य के सिद्धान्त की व्याख्या करें।

$$\tan^{-1}\left(\frac{2e\sin a}{1-e^2}\right)$$

where a is the angle between the chord and axis. 13

PSP' शांकव की एक नाभीय जीवा है। सिद्ध करें कि P और P' पर स्पर्श-रेखाओं के मध्यस्थ कोण है

$$\tan^{-1}\left(\frac{2e\sin a}{1-e^2}\right)$$

जहाँ a जीवा और अक्ष के मध्य कोण है।

6. Solve the following : 10×4=40

निम्न को हल करें :

(i) $\dfrac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3\cos^2 y$

(ii) $p^3 - 4pxy + 8y^2 = 0$

where (जहाँ) $p = \dfrac{dy}{dx}$

(iii) $(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1)\, y\, dx + (x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1)\, x\, dy = 0$

(iv) $(D^2 - 4D + 4)y = 8x^2e^{2x}\sin 2x$

where (जहाँ) $D \equiv \dfrac{d}{dx}$

7. (a) Solve by the method of variation of parameter, the equation

निम्न समीकरण को वैरिएशन ऑफ पैरामीटर के नियम से हल करें

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x\log x$$ 20

3. (a) Find the maximum value of $u = x^p y^q z^r$ when $ax + by + cz = p + q + r$. 10

$u = x^p y^q z^r$ का महत्तम मान निकालें, जबकि $ax + by + cz = p + q + r$.

(b) Show that

सिद्ध करें कि

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x},\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$ 10

(c) With usual notation, prove the following : 10×2=20

सामान्य संकेतन की सहायता से निम्नलिखित को सिद्ध करें :

(i) $\displaystyle\int_0^a x^3(2ax - x^2)^{3/2}\, dx = a^7\left(\frac{9\pi}{32} - \frac{23}{55}\right) > 0$

(ii) $\Gamma(m)\,\Gamma\left(m + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\,\Gamma(2m)$,

where (जहाँ) $m > 0$

4. (a) Show that every continuous function is Riemann-integrable and every bounded monotonic function is also Riemann-integrable. 10

दिखाएँ कि प्रत्येक संतत फलन रीमान-समाकलनीय है तथा प्रत्येक परिबद्ध एकदिष्ट फलन भी रीमान-समाकलनीय हैं।

(b) Discuss the convergence of the following integral : 10

निम्न समाकलन के अभिसरण की विवेचना करें :

$$\int_a^\infty x^{n-1} e^{-x} dx, \text{ where } a > 0$$

(c) Compute

$$\iint (x+y)^2 \, dx \, dy$$

over the region determined by

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

10

ज्ञात करें

$$\iint (x+y)^2 \, dx \, dy$$

उस प्रदेश पर जो कि निर्धारित होता है

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(d) Show that the area between the curve $y^2(2a-x) = x^3$ and its asymptote is $3\pi a^2$. 10

सिद्ध करें कि वक्र $y^2(2a-x) = x^3$ एवं इसके अनन्तस्पर्शी के बीच का क्षेत्र $3\pi a^2$ है।

5. *(a)* Show that the plane $x + y - 2z = 3$ cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 2$ in a circle of radius 1 and find the equation of the sphere which has this circle as a great circle. 13

दिखाएँ कि समतल $x + y - 2z = 3$ गोलक $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 2$ को त्रिज्या 1 के वृत्त में काटता है और उस गोलक का समीकरण ज्ञात करें जिसमें यह वृत्त एक वृहत् वृत्त होता है।

(b) Prove that for all values of λ, the normals to the conicoid

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

which passes through a given point (α, β) meet the plane $z = 0$ in points on the conic

$$(b^2 - c^2)\beta x + (c^2 - a^2)\alpha y + (a^2 - b^2) xy = 0, \; z = 0$$

14

सिद्ध करें कि λ के सभी मानों के लिए शांकवज

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

के वे अभिलम्ब, जो एक दिए हुए बिन्दु (α, β) से गुजरते हैं, समतल $z = 0$ से उन बिन्दुओं पर मिलते हैं जो शांकव

$$(b^2 - c^2)\beta x + (c^2 - a^2)\alpha y + (a^2 - b^2) xy = 0, \; z = 0$$

पर हैं।

(c) PSP' is a focal chord of a conic. Prove that the angle between the tangents at P and P' is